

# 量子力学におけるスピンの起源は何か

松原邦彦

2015年2月13日

## 1 スピン発見の経過

電子のスピンがどのような経過を経て導入されてきたかを簡単に振り返ってみよう。光の連続スペクトルの中に暗線として現れる吸収周波数が多重線であることが発見され、1920年ころ、当時確立していた前期量子力学によってその説明が多くの人によって試みられたが電子の軌道運動では説明できず、未知の原因による磁気モーメントの存在を示していた。A.Landé と A.Sommerfeld は1920年から1925年にかけて次のような考えを提案した。原子の核に量子化された角運動量  $s$  を持っているものがあって、それによって軸対象に磁場が発生し、Zeeman 効果が起こり、その磁気能率との相互作用によって原子スペクトルが微細に分岐すると想定した。この理論と実験での多重線の現れ方が合うためには多重項が偶数項の場合には想定した角運動量  $s$  が  $h/2\pi$  で測って半整数をとる必要があった。歴史的には角運動量に半整数が現れたのはこのときをもって始まる。

Landé-Sommerfeld の考え方には原子核の種類によっていくつかの不都合があることがわかった。核の種類が違ふごとに  $s$  も違ふと考えられるのだが、実験結果は必ずしもそうではなかった。W.Pauli は半整数をとる角運動量は電子自身に固有のものとして考えれば、それまでの矛盾が解決することを主張した。

これらの現象を説明するためにウーレンベック (G.E.Uhlenbeck) とハウトスミット (S.A.Goutsmit) は1925年に電子の自転による角運動量を提唱した。パウリははじめこの考えを受け入れなかった。自転電子は有限な大きさを持たなければ意味を持たず、その表面速度は光速を超えるなど理論上いろいろな困難を伴っているからである。自転電子に賛否両論ある中で、L. H. Thomas は電子の自転の理論に基づき、アルカリ原子のスペクトルの2重項内にある2つの準位間隔値について、実験値とランデの計算値との差を埋めることに成功した。この新しい自由度はコマのような自転を表すものと考えられ、パウリによって1927年に量子力学へスピン演算子の形で導入された。素粒子が大きさを持たない点であるとするれば、古典力学的にはスピン角運動量を持つことはできないので、この自由度は光でいえば偏光のようなもので、電子の内部状態を表すものと云う以外に説明方法が見つからない。

ディラックは1928年ディラック方程式と呼ばれる相対論的波動方程式を発表した。ディラック方程式からは自動的に電子のスピンが導かれる。これをもってして電子のスピン起源の問題がすべて解決したかのように結論するテキストがあるが、しかしながらどのような具体的構造によってスピンが生まれるか、いかにしてスピンが実現するか、その仕組み、起源を明らかにしてくれる訳ではない。ここにディラックの方程式からスピンの起源が導き出されるとするならば、確かにその方程式を成立させている物理法則の中にスピンが存在すべき原理が含まれており、その成立過程が明らかにされるべきである。しかし実際はずっと複雑な状況にある。ディラックの方程式については5章に触れる。

電子は点粒子とみなされており、ただ自転に似たものが存在することを示しているとは表現するほかはなく、4元の表現形式から要求されるところにより、内部に  $x, y, z$  の3つの自由度のほかに第4の自由度をもつ必要があり、これをもってスピンの自由度と考える以外になかった。スピンの概念は回転するコマのイメージに似ていても、単なる物体の回転ではない。その性質を列挙すれば、

- 1) 素粒子のスピンはいつも同じ値をもっており、素粒子同士が衝突し、エネルギーが変わっても既にあるものを取り去ったり、追加することはできない。
- 2) 素粒子のスピンは原子核の周囲に運動している電子の軌道運動量モーメントに加えることもできるし、その運動量モーメントから差し引くこともできる。
- 3) スピンはその素粒子から切り離すことができない。その素粒子自身が別の粒子に転換しない限り変わることはない。

1933年シュテルン-ゲルラッハ (O.Stern and W.Gerlach) の実験において、中性の銀原子は空間変化する磁場を通過させると二つの線条に分かれることが見いだされた。銀原子は極く小さな磁気モーメントを持つ小磁石と見なされることとなった。1960年代には紫外発散の解決のためにいくつかの理論が提起された。スピンの存在をも説明できるモデルが目標であった。剛体モデル理論では剛体の自転でスピンを説明しようとした。しかし半整数のように固定したスピンの値を理論的に説明することは難しく、量子的に付与の性質として与える以外に方法はなかった。スピン  $1/2$  の粒子を通常回転から説明することの難しさは次の通りである。ある状態を  $180$  度回転させると向きは反対になる (反転する) のだが、スピン  $1/2$  の粒子では  $360$  度回転させてようやく状態の向きが反転する。通常回転では  $360$  度回転すると元の状態に戻るのだから、通常物体の回転の概念ではそのようなモデルは成立しない。ただ一つメビウスの帯でそのようなことが起こるのだが、それは3次元構造を必須とし、点粒子モデルでは成立しえない。非局所場理論や素領域の理論では内部に何らかの空間的広がりをもち、その自由度の一つとして自転を考え、スピンの起源を説明しようとした。しかしいずれの場合も半整数スピンを必然の結果として導出することは困難であり、この場合も量子化の時点でスピンを所与の性質として与える以外になかった。ひも理論においても量子化の過程で同様の論理的飛躍に遭遇する。スピンの性質については古典物理学にそれに相当するものが見あたらないから、古典力学の角運動量を手本としてスピンを量子化に持ち込む手法はことごとく破綻するのである。

## 2 軌道角運動量と演算子

量子力学における軌道角運動量の表現は次の様な概念によって構成されている。まず飛行粒子の角運動量を古典力学に基づいて  $L$  とすると

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x, \quad (1)$$

と定義される。次に量子力学の基本原則に従って  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$  とともに演算子と見なし、従って  $L_x, L_y, L_z$  も演算子と見なす。そうすると、この角運動量演算子の交換関係は次のように得られる。

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y. \quad (2)$$

ここでは角運動量は明らかに空間座標の関数である。ここで角運動量の大きさの二乗について求めると

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (3)$$

である。この量を演算子と見なし、 $L_x, L_y, L_z$  のそれぞれとの間の交換関係を求めると、

$$[L^2, L_x] = 0, \quad [L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0 \quad (4)$$

となる。このことから  $L^2$  と  $L$  の各空間要素は同時に同じ固有関数  $\phi$  をもつとみなし、

$$L^2\phi = \lambda\phi \quad \text{および} \quad L_z\phi = \mu\phi \quad (5)$$

とし、観測可能な物理量（オブザーバブル）としての角運動量は演算子  $L^2$  および  $L_z$  によって与えられるとする。

この方程式を解くために使われる方法として交換関係から固有値を導く代数的方法がある。それよれば、まず「昇降演算子」と呼ばれる次のような演算子を定義する。

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y \quad (6)$$

そうすると (2) より

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} \quad \text{および} \quad [L^2, L_{\pm}] = 0 \quad (7)$$

という交換関係が得られる。ここで (5) のように  $\phi$  が  $L^2$  および  $L_z$  の固有関数であるとみなしているから、

$$L^2(L_{\pm}\phi) = L_{\pm}(L^2\phi) = L_{\pm}(\lambda\phi) = \lambda(L_{\pm}\phi) \quad (8)$$

となって  $L_{\pm}\phi$  もまた  $L^2$  の  $\lambda$  に対する固有関数になっており、同時に

$$L_z(L_{\pm}\phi) = (L_zL_{\pm} - L_{\pm}L_z)\phi + L_{\pm}L_z\phi = \pm\hbar L_{\pm}\phi + L_{\pm}(\mu\phi) = (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}\phi) \quad (9)$$

となって、 $L_{\pm}\phi$  は新しい固有値  $\mu \pm \hbar$  に対する固有関数になっている。 $L_+$  は演算子として作用させるたびに  $\mu$  の値に  $\hbar$  分を一つずつ増やしてゆくのので上昇演算子と呼び、 $L_-$  は逆に一つずつ減らしてゆくのので下降演算子と呼ぶ。くわしくは量子力学の多くの教科書に取り扱われている。 [3]

### 3 スピン角運動量の表現

スピンに関する代数的理論の基礎をなす交換関係は軌道角運動量の理論のカーボンコピーである [3]。なぜなら現在の理論はスピンの形成を 3 次元空間における構造で説明する手段を何も持っていないからである。スピン角運動量演算子  $S$  についてはその時空的構造は何一つ与えられず、いきなり粒子が角運動量を伴っていると考えることから始まる。スピンの表現は、そのひな型を軌道角運動量からの類推によって得ているにすぎない。そして式 (2) をヒントにして次の交換関係を所与の性質として一方的に与えるしかないのである。

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (10)$$

ここで  $S^2$  および  $S_z$  の固有関数を  $\phi_s^m$  として

$$S^2\phi_s^m = \hbar^2 s(s+1)\phi_s^m; \quad S_z\phi_s^m = \hbar m\phi_s^m; \quad (11)$$

の関係式を満たすとする。これも軌道角運動量からの類推である。(6)に対応して昇降演算子  $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$  を与えると

$$S_{\pm}\phi_s^m = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\phi_s^{m\pm 1}, \quad (12)$$

$$s = 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad \dots; \quad m = -s, \quad -s+1, \quad \dots, \quad s-1, \quad s. \quad (13)$$

さてスピンの場合には  $\phi_s^m$  は  $\theta$  や  $\phi$  などの時空の関数の形に書けないのでケットベクトルとして通常  $|sm\rangle$  と書かれる。これらの関係は空間座標の関係式から導かれたものであるにもかかわらず、その時空構造がわからないために空間座標の関数として定義できず、波動関数として取り扱うのは不自然であり、それらを定義式中に持ち込むことができないのである。軌道角運動量の場合には  $s, m$  はその理論的原理と時空構造から整数しか採れなかった。スピンの場合にはシュテルン-ゲルラッハの実験によれば設定した磁場の方向に対して空間変化する磁場で2つに分かれることから2つの固有状態を持つものと解釈される。この事実から一方的に半整数  $\pm 1/2$  しか採れないとするほかない。 $s$  は素粒子の種類によって特定し、パイ中間子は0、電子は  $1/2$ 、光子は1と決める。

### 3.1 スピノール

関係式 (11) を満たす  $\phi_s^m$  は時空間の関数でなくベクトルであり、半整数スピンの粒子に対して  $s = 1/2$  とすれば  $m = 1/2, -1/2$  の二つしか取れない。この粒子は運動状態にないとき二つの固有状態を持つと考えられる。この二つの状態を表現するため基ベクトルを作る。このベクトルは2要素からなり、

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

と定義する。さらにもう一つの基ベクトルを作り、

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

とする。この二つの基ベクトルは互いに独立な事象について一つづつその状態を背負わせたものである。従ってスピンの表現に関して完全直交系を作っているとみなせる。これを使えば半整数スピンの粒子のある状態を

$$\chi = a\chi_+ + b\chi_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (16)$$

で表すことができるであろう。このように構成したものをスピノールと呼ぶ。

### 3.2 パウリのスピンマトリクス演算子

$\chi_+$  と  $\chi_-$  を固有ベクトルとして (11) の表式に従うとすると  $s = 1/2$  として

$$S^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+, \quad S^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-. \quad (17)$$

スピンの角運動量演算子  $S$  は  $2 \times 2$  マトリクスになる。 $S$  の採るべき値は上式の関係において二つの基ベクトルを用い、関係式 (11) と (12) から定める。 $S^2$  の 4 つの要素をそれぞれ  $c, d, e, f$  として上式の第一式を書き下すと

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

第二式を書き下すと

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

従って  $c = f = (3/4)\hbar^2$ ,  $e = d = 0$  となり、結局

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

となる。

次に (11) の第二式から

$$S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-, \quad (21)$$

を得て、これらの関係式に上と同様の方法を適用して

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

を得る。上記の計算が行っていることを言葉で述べよう。上のようにして定めたスピンマトリクス  $S_z$  はスピノールの 2 つの基ベクトルの固有値が  $z$  軸に対して測定した値が  $\hbar/2$  あるいは  $-\hbar/2$  に一致するように各要素を選んだ演算子だと言うことができる。

$S_x$  および  $S_y$  については (11) において  $f_{1/2}^{1/2} \Rightarrow \chi_+$ ,  $f_{1/2}^{-1/2} \Rightarrow \chi_-$  として

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, \quad S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0$$

これらの関係式から

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

と求まる。 $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  であるから  $S_x = (1/2)(S_+ + S_-)$ ,  $S_y = (1/2i)(S_+ - S_-)$  と表せる。従って

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

$s = 1/2$  の素粒子に対して  $S = (\hbar/2)\sigma$  と書けば記法上すっきりした形で書ける。 $\sigma$  の成分を用いると (10) は

$$\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = 2i\sigma_x, \quad (25)$$

$$\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z = 2i\sigma_y, \quad (26)$$

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i\sigma_z \quad (27)$$

となる。(11)において  $s = 1/2$  であるとする。次の関係式が導かれる。

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1. \quad (28)$$

(25) から (28) の関係からいくつかの代数的計算を行うことによって次の関係が導かれる。

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0, \quad (29)$$

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0, \quad (30)$$

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0. \quad (31)$$

この表記を使って  $S = (\hbar/2)\sigma$  と書き、

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

とし、これをパウリのスピンマトリクスと呼んでいる。この表記は座標  $z$  を特別に選んで設定したものである。これは  $\sigma_z$  が対角化したマトリクスになるように選んだ表現であり、もし (11) の第二式で  $S_z$  のかわりに  $S_x$  を設定して、以下同様に  $\sigma$  を導出すれば  $\sigma_x$  が対角化されるのである。この意味で、パウリのスピンマトリクスは  $z$  軸を特定の軸として、この軸に沿ってスピンの測定を行ったときに現れる 2 つの値を状態の基本的要素  $\chi_+, \chi_-$  で表すように設定したものである。以後は  $\sigma_z$  を対角化したマトリクスを用いる。

## 4 スピンの固有値と固有関数

固有値問題は与えられた演算子に対して実現可能な状態を規定するものであり、固有値はその状態で測定される値に対応する。逆にいえば、ある測定値が与えられるとき、その測定状態において満たされる関数と演算子との関係を与える。どちらから解釈しても関係式が表す内容は同じことである。まず  $S_x$  の固有値と固有関数を求めてみよう。 $S_x f^{(x)} = \lambda f^{(x)}$  を想定し、その特性方程式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

から  $\lambda$  について解くと固有値は  $\hbar/2$  および  $-\hbar/2$  の二つであることが分かる。そこで対応する固有関数も二つになり、

$$S_x \chi_+^{(x)} = \frac{\hbar}{2} \chi_+^{(x)}, \quad S_x \chi_-^{(x)} = -\frac{\hbar}{2} \chi_-^{(x)}, \quad (34)$$

と書き表せる。ここに  $\chi_+^{(x)}$  および  $\chi_-^{(x)}$  はそれぞれ二つの要素  $\alpha, \beta$  からなるとして、上式からそれぞれの要素を求めれば  $\beta = \alpha$  および  $\beta = -\alpha$  であることがわかる。 $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$  に従ってノーマライズすれば

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

となる。これらの固有関数はエルミートであって独自の空間を張る。つまり独特の座標系を構成する。一般形式に書かれたスピノール (16) を  $\chi_+^{(x)}$  および  $\chi_-^{(x)}$  で表すことができ

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}, \quad (36)$$

の関係にある。

次に  $S_y$  の固有値と固有関数を求めよう。 $S_y f^{(y)} = \lambda f^{(y)}$  を想定し、その特性方程式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i\hbar/2 \\ i\hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

から  $\lambda$  について解くと固有値はやはり  $\hbar/2$  および  $-\hbar/2$  の二つであることが分かる。そこで対応する固有関数も二つになり、

$$S_y \chi_+^{(y)} = \frac{\hbar}{2} \chi_+^{(y)}, \quad S_y \chi_-^{(y)} = -\frac{\hbar}{2} \chi_-^{(y)}, \quad (38)$$

と書き表せる。ここに  $\chi_+^{(y)}$  および  $\chi_-^{(y)}$  はそれぞれ二つの要素からなるとしてそれらを  $\gamma, \delta$  とすれば  $\delta = i\gamma$  および  $\delta = -i\gamma$  であることが上式から求められる。 $\gamma\gamma^* + \delta\delta^* = 1$  とノーマライズすれば

$$\chi_+^{(y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \chi_-^{(y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i\frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

となる。これらもエルミートであって独自の空間を張る。一般形式に書かれたスピノール (16) と  $\chi_+^{(y)}$  および  $\chi_-^{(y)}$  の関係は

$$\chi = \left(\frac{a-ib}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(y)} + \left(\frac{a+ib}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(y)}, \quad (40)$$

と書かれる。

## 5 任意方向スピンの演算子と期待値

$x, y, z$  空間で任意の方向を向いた単位ベクトル

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k} \quad (41)$$

の方向に対するスピン演算子  $S_\Omega$  を求めよう。方向余弦  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  は図 1 の座標系で

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \phi, \quad \Omega_y = \sin \theta \sin \phi, \quad \Omega_z = \cos \theta \quad (42)$$

であるから

$$S_\Omega = \frac{\hbar}{2} \{ \Omega_x \sigma_x + \Omega_y \sigma_y + \Omega_z \sigma_z \} \quad (43)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Omega_z & \Omega_x - i\Omega_y \\ \Omega_x + i\Omega_y & -\Omega_z \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (45)$$

ここで固有値は  $+\hbar/2, -\hbar/2$  の二つであるから

$$S_\Omega \chi_+^{(\Omega)} = \frac{\hbar}{2} \chi_+^{(\Omega)}, \quad S_\Omega \chi_-^{(\Omega)} = -\frac{\hbar}{2} \chi_-^{(\Omega)} \quad (46)$$

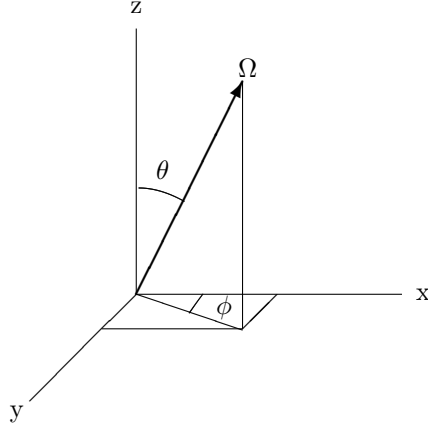


図 1: 座標系の設定

を満たす二つの固有関数があるであろう。それらの関数を次のような 2 要素  $\alpha, \beta$  で表すとすれば

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (47)$$

となる。この関係式から  $\alpha, \beta$  を求めると次の 2 組の関係式が得られる。

(1) 固有値  $\hbar/2$  の場合:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi)}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi)} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)e^{i\phi}} \quad (48)$$

(2) 固有値  $-\hbar/2$  の場合

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi)}{1 + \cos \theta} = -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi)} = -\frac{\sin(\theta/2)e^{-i\phi}}{\cos(\theta/2)} \quad (49)$$

ただし

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$$

である。したがって

$$\chi_+^{(\Omega)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad \chi_-^{(\Omega)} = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (50)$$

とすれば十分である。

あるスピンの状態  $\chi$ , 式 (21), が与えられたときスピン  $S$  の向きはその期待値を計算することで得られる。

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \chi | \mathbf{S}_x | \chi \rangle \\ \langle \chi | \mathbf{S}_y | \chi \rangle \\ \langle \chi | \mathbf{S}_z | \chi \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a^*b + b^*a \\ -i(a^* - b^*a) \\ a^*a - b^*b \end{pmatrix} \quad (51)$$



固有関数 (50) において  $\chi_+^{(\Omega)}$  は角運動量ベクトル  $\Omega$  に関してこれに垂直な平面上に観測装置を置いて測定したときに現れる角運動量を固有値として  $\hbar/2$  および  $-\hbar/2$  を実現するために必要な条件を満たす関数形を求めたものである。このことは次のようにして確かめられる。いま図 1 の座標系で (41) で与えられる任意の方向  $\Omega$  に対して固有値  $\hbar/2$  を与える固有ベクトル  $\chi_+^{(\Omega)}$  の場合、式 (51) によって  $S$  の期待値を求めると

$$\langle S_\Omega \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (52)$$

となり、最初に与えた方向  $\Omega$  の向きを持つスピンの方向に対応する。 $\Omega$  がそれぞれ特別な軸に沿っている場合は下記のようになる。

a)  $\theta = \pi/2, \phi = 0$  のとき :

$$S_\Omega \rightarrow S_x, \quad \langle S \rangle = \frac{\hbar}{2}(1, 0, 0), \quad \chi_+^{(\Omega)} \rightarrow \chi_+^{(x)}, \quad \chi_-^{(\Omega)} \rightarrow \chi_-^{(x)} \quad (53)$$

b)  $\theta = \phi = \pi/2$  のとき :

$$S_\Omega \rightarrow S_y, \quad \langle S \rangle = \frac{\hbar}{2}(0, 1, 0), \quad \chi_+^{(\Omega)} \rightarrow \chi_+^{(y)}, \quad \chi_-^{(\Omega)} \rightarrow \chi_-^{(y)} \quad (54)$$

c)  $\theta = 0, \phi = 0$  のとき :

$$S_\Omega \rightarrow S_z, \quad \langle S \rangle = \frac{\hbar}{2}(0, 0, 1), \quad \chi_+^{(\Omega)} \rightarrow \chi_+, \quad \chi_-^{(\Omega)} \rightarrow \chi_- \quad (55)$$

上記の a), b), c) で確認できることは、空間の任意方向を向いたスピン  $S_\Omega$  があるとき、その特別な座標系の取り方によって  $S_x$  になったり  $S_y$  になったり、あるいは  $S_z$  になったりし、同時にその状態を表すスピノール  $\chi_\pm^{(\Omega)}$  も  $\chi_\pm^{(x)}$  や  $\chi_\pm^{(y)}$ 、あるいは  $\chi_\pm$  になったりするということである。そしてどのような座標系の選び方をしても変わらないのは、(21) に示したような  $S$  なるスピンに対して測定を行うと  $\hbar/2$  という値又は  $-\hbar/2$  という値が得られることを示す表現形式だけである。言い換えると現在の量子力学はこの前提に立ってスピンの表現形式が組み立てられている。このような定式化においては古典論的にスピンの起源を説明することはお手上げになり、これをもって量子力学はスピンを古典的に解釈することは原理的に許されないとしてしまう。起源の説明がお手上げになると、それをもってして原理に還元してしまう傾向が現在の量子力学を支配しているといえる。

## 6 ディラック方程式によるスピンの表現

ディラックの方程式は次の原理からなる。

(1) 方程式は時間、空間について一階の微分方程式でなければならない。

(2) 方程式は相対論的に不変な形式でなければならない。

さてディラックは上記の条件を満たすため上記原理を満たすために 4 行 4 列の係数マトリクス  $\alpha$  を導入して

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right\} - \sum_{r=1,2,3} \alpha_r \left( \frac{\partial}{\partial x_r} + eA_r \right) - \alpha_0 mc \psi = 0 \quad (56)$$

とし、 $\alpha_0, \alpha_r$  をマトリクスであるとした。その形を決めるために、電子が外場の作用を受けない時にこの形式が相対論的に不変の形を持つクライナー-ゴードンの方程式に矛盾しないという条件から、次の拘束条件を用いた。

$$\alpha_\mu^2 = 1, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (57)$$

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0, \quad (\mu \neq \nu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (58)$$

具体的には次の形を用いている。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

ディラック方程式はスピン磁気能率の存在を導出する。ここでマトリクス  $\alpha$  をパウリのスピンマトリクスに類似の形式に表現しなおし、

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1 \sigma_3, \quad \alpha_0 = \sigma_3 \quad (60)$$

と書き直す。外部から磁場  $H$  をかけたときの電子の振る舞いがディラック方程式 (56) で表されるとすると、この方程式から導かれる 2 階の方程式はクライナー-ゴードンの方程式に一致しない。両者の差を求めると

$$\frac{\hbar e}{c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}) \quad (61)$$

が余分に残る。この第 1 項の持つ意味をハイゼンベルグ流の見方でハミルトン関数の一部であるとみなすと  $-(\hbar e/2mc)\boldsymbol{\sigma}$  が電子の磁気能率を表すとの解釈が成立する。つまりそれがパウリの理論によるスピン磁気能率マトリクスになっている [1]。

では方程式からスピン角運動量が直接に導出されるかということそう簡単ではなく、まず方程式を中心力の場に適用し、原子における軌道角運動量を求めなければならない。この条件でハミルトン関数を

$$H = -eA_0(r) + c\rho_1(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + \rho_1 mc^2 \quad (62)$$

として、角運動量に対するハイゼンベルグの運動方程式を求める。そして角運動量が保存量になるための条件を課すとき、電子スピンの存在を仮定した上で、付加すべき角運動量がパウリの導入したスピンマトリクスに一致するというのである。このためにまず軌道の角運動量の  $x_1$  成分  $L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$  の時間変化率を求める。ここで (1) の関係を用いると、

$$i\hbar \dot{L}_1 = L_1 H - H L_1 = c\rho_1(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{p} - \mathbf{p} \mathbf{L}_1) = i\hbar c\rho_1\{\sigma_2 p_3 - \sigma_3 p_2\}. \quad (63)$$

ゆえに軌道角運動量の時間変化率  $\dot{L}_1$  はゼロでない。 $\dot{L}_2, \dot{L}_3$  についても同じである。

そこで (62) に現れる  $\boldsymbol{\sigma}$  に関してその時間変化率を調べてみる。ここで (25) の関係を用いて

$$i\hbar \dot{\sigma}_1 = \sigma_1 H - H \sigma_1 = c\rho_1(\sigma_1 \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \sigma_1 \cdot \mathbf{p}) = 2i c\rho_1\{\sigma_3 p_2 - \sigma_2 p_3\}. \quad (64)$$

となる。 $\dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3$  についても同様である。この計算からディラックは

$$\dot{L}_1 + \frac{1}{2}\hbar \dot{\sigma}_1 = 0$$

が成立するから、ベクトル  $L + (1/2)\hbar\sigma$  が保存量になるとしてスピンの存在を導くとした。ディラック自身が言及しているように [2]、マトリクス  $\alpha$  の機構がスピン角運動量やスピン磁気能率の存在を導くとしている。

しかしこの条件から電子のスピンの時空構造が出てくるかといえば決してそのようなことはない。なぜならば (25) の関係式は原子のスペクトルの測定から出てきた実験値  $s = 1/2$  に基づき、軌道角運動量のカーボンコピーとしてあてはめた時空表現であるからである。ただ言えることはディラックのマトリックス表現機構が角運動量の保存則と相まってスピンの存在を許容しているということに止まる。特にスピンの特異性である  $1/2$  の構造はディラックの方程式から決めることができない。

## 参考文献

- [1] 朝永振一郎、「スピンはめぐる」、成熟期の量子力学、みすず書房 (2008)
- [2] Martin Revas, Classical elementary particles, spin, zitterbewegung and all that, arXiv:physics/0312107v1 [physics.class-ph] 17 Dec 2003
- [3] D.J.Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Second Edition, (Pearson international edition), Pearson Education, Inc. (2005)
- [4] Henri Poincaré, La Science et l'Hypothèse, ポアンカレ著、河野伊三郎 訳、科学と仮説、岩波書店 (1982)
- [5] 松原邦彦、「時空構造と存在の確定」、丸善プラネット (株) (2006)
- [6] L. スモーリン, "ループ量子重力理論", 日経サイエンス, 2004 年 4 月号, p32, 原題 "Atoms of Space and Time", SCIENTIFIC AMERICAN January 2004.