

# アインシュタインの同時性と時間についての考え方

松原 邦彦

2006年2月15日、2014年1月4日追記

## 1 同時性

アインシュタインの相対性理論の革新的な概念はその時間についての考え方を変えることから始まり、これが従来の理論を一変させてしまう。それまでは静止している座標系  $K$  と運動している座標系  $K'$  とで、時間は共通に流れ、常に  $t' = t$  が成立するとしていたのであるが、アインシュタインは2つの座標系の絶対的な時間の流れから決別した。この考えはまさにアインシュタインの革命と呼ばれるにふさわしいものだった。彼は

$$t' = \gamma(t - \beta x) \quad (1)$$

という関係を導入した。

この式の形がどのようにして決められたか明らかにしよう。相対性の理論の説明は、世の中のたくさんの本に、様々な方法で紹介されている。これらは、アインシュタインの最初の論文発表以後、様々な人によって解釈され、説明もそれぞれ独自に工夫されたものが混入しているので、必ずしも同じスタイルにはなっていない。ここにはできるだけ原論文 [1] に忠実に説明を試みる。彼は同時性の定義から始めている。まず

「あの汽車はここに7時に到着する」という例を引いて、駅のプラットフォームに立つ自分の時計の針の位置と、汽車の到着という事件を関連させて同時を確認する。同じ場所で同時に起こったことは疑う余地もなく同時性が成り立つ。しかし異なる場所で起こった2つのことがらの同時性は簡単ではない。離れた2点、A点とB点にそれぞれ時計を置いておき、この2つの時計の同調をとることから説明する。A点の時計の時刻を添え字Aで表し、B点の時計の時刻を添え字Bで表す。同調をとるには光を使う。いまA点から  $t_A$  に発した光がB点に到着したとして、これをB点の時計で  $t_B$  と記録する。直ちに光は反射してA点に戻ったとして、A点の時計でその時刻を  $t'_A$  と記録する。そしてそれぞれの記録を持ち寄って計算したところ

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \quad (2)$$

が成り立っていれば2つの時計は同調していると見なすことができる。例えばA点を地球上にとり、B点を月にとったとしよう。地球上のAが0時に光を月に向かって発したとしよう。月のBがこれを0時1.2秒に受け取ったとしよう。つまり  $t_A = 0:0:0$  で  $t_B = 0:0:1.2$  であったとしよう。ただちに光信号を反射させて地球上に送り返しAがその信号を受け取った時刻が  $t'_A = 0:0:2.4$  であったとしてみよう。上式左辺は最初に光が2点を伝播した時間を2つの時計で計ったものであり、その差は  $0:0:1.2$  である。右辺は同じ経路を反射で戻った時間を2つの時計で測ったものでやはり  $0:0:1.2$  である。同じ経路に対して測ったものであるから、もし両者に差があればどちらかの時計に一定のずれがあることを表すであろう。

## 2 長さや時間の相対性

さて A 点、B 点いずれも静止している系（定常系）では上のようにして任意の点の間に同時性を確立しておけばよいのであるが、動いている系における時計の同調を、静止している系から観測するとすればどうなるであろうか。

アインシュタインは定常系で測った長さ  $r_{AB}$  の棒を考え、定常系の  $x$  軸に沿っていて  $+x$  方向に速度  $v$  で動いている状態を考えた。棒の両端 A と B にそれぞれ定常系で同調させた時計を載せてあるとする。いま前節と同じ時計の同調を棒の上で行うとする。そして動いている棒の上では前節の方法で同調が確かめられたとする。観測者は静止しているとして、この過程をどう観測するであろうか。いま点 A から時刻  $t_A$  に光が発せられたとして、光が B 点に届いたときは棒の B 点は光が発せられたときより  $+x$  方向に  $v(t_B - t_A)$  だけ移動している。つまり  $(t_B - t_A)$  の間に光が走った距離は  $r_{AB} + v(t_B - t_A)$  である。一方、この距離は光の速度は一定であるとして  $c(t_B - t_A)$  である。したがって

$$c(t_B - t_A) = r_{AB} + v(t_B - t_A) \quad (3)$$

今度は光が B 点で反射して A 点に戻ったとし、その戻った時刻を  $t'_A$  としよう。このとき棒の B 点は光が発せられたときより  $+x$  方向に  $v(t'_A - t_B)$  だけ移動している。したがって

$$c(t'_A - t_B) = r_{AB} - v(t'_A - t_B) \quad (4)$$

これを整理して書き直せば

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v} \quad (5)$$

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v} \quad (6)$$

となる。そこで、前節に述べた同時性の定義にしたがって判定するならば、それぞれの系の内部で時計は同調していても一方から他方を見れば時計は同調していないと主張するに違いない、とアインシュタインは述べている。

## 3 時間の変換の形式

ここで 1 つの定常系を考え、この座標と時間を  $x, y, z, t$  で表す。もう一つの座標系を考え、 $x', y', z', t'$  で表す。いま  $x'$  軸は  $x$  軸に重なっていて、 $y'$  軸および  $z'$  軸は  $y$  軸および  $z$  軸に平行であるとし、この系は速度  $v$  で  $x$  軸方向に運動しているものとする。両系にそれぞれ 2 つずつ時計を配置し、それぞれの系内で同調させておく。そして運動している系で起こった事件の座標と時間を静止している系の座標と時間へ変換することを考える。前節による考察では運動する系の時間の同調を静止する系の座標と時間からみると、その位置に依存するらしいことが分かったので、 $t'$  は  $x, y, z, t$  の関数で表されると考える。

いま、運動している系の原点から時刻  $t'_0$  に光を放射したとして、 $x$  軸に沿って  $x_t$  に到達した光が時刻  $t'_1$  に反射して座標原点に  $t'_2$  に戻ったとする。そうすると

$$\frac{1}{2}(t'_0 + t'_2) = t'_1 \quad (7)$$

を得る。アインシュタインはここで運動している系で起こった事件の1点は

$$x_t = x - vt \quad (8)$$

と表せば、運動している系の中での定点は時間に無関係な  $x_t, y, z$  という組を持つはずであると考えた。こうしておいて  $t'$  を  $(x_t, y, z, t)$  の座標と時間の関数として表す。そこで (5), (6) を考慮して

$$t'_0 = t'(0, 0, 0, t) \quad (9)$$

$$t'_1 = t'(x_t, 0, 0, t + \frac{x_t}{c-v}) \quad (10)$$

$$t'_2 = t'(0, 0, 0, t + \frac{x_t}{c-v} + \frac{x_t}{c+v}) \quad (11)$$

と置く。ここで  $x_t$  を無限小の値  $dx_t$  にとる。そして  $t'$  は  $x_t$  と  $t$  の関数であるとして

$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial x_t} dx_t + \frac{\partial t'}{\partial t} dt \quad (12)$$

を計算すると、

$$dt'_0 = \frac{\partial t'}{\partial t} dt \quad (13)$$

$$dt'_1 = \frac{\partial t'}{\partial x_t} dx_t + (1 - \frac{v}{c-v}) \frac{\partial t'}{\partial t} dt \quad (14)$$

$$dt'_2 = (1 - \frac{v}{c-v} - \frac{v}{c+v}) \frac{\partial t'}{\partial t} dt \quad (15)$$

これらを (7) の関係式に用いれば

$$\frac{1}{2} (2 - \frac{v}{c-v} - \frac{v}{c+v}) \frac{\partial t'}{\partial t} dt = \frac{\partial t'}{\partial x_t} dx_t + (1 - \frac{v}{c-v}) \frac{\partial t'}{\partial t} dt \quad (16)$$

となり、(8) から  $dx_t/dt = -v$  であることを考慮すればこの関係式から

$$\frac{\partial t'}{\partial x_t} + \frac{v}{c^2 - v^2} \frac{\partial t'}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

を得る。

同じ議論を  $y$  軸および  $z$  軸について当てはめると

$$\frac{\partial t'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$$

を得る。さて、空間と時間は線形という性質を持つから、 $t'$  と  $x_t, t$  との関係は1次でなければならない。そうすれば、線形一階偏微分方程式 (17) の一般解から次の関係式を得る。

$$t' = \phi(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x_t) \quad (18)$$

上式で  $\phi$  は未知関数  $\phi(v)$  である。簡単のため、 $t = 0$  のとき運動している系の原点において  $t' = 0$  と仮定する。 $x_t$  に掛かる符号は線形一階微分方程式の形によって決まる。上式の  $x_t$  に (8) を用いて  $x$  と  $t$  についての表現式に整理すれば (1) 式の形になる。ここに  $\gamma$  および  $\beta$  の間には一定の関係があるが、いずれにしろ一つの未知関数を含むのでいずれも速度についての未知関数であるとした。このようにしてアインシュタインは時間  $t'$  についての変換形式を決定した。ここに現れる未知関数の決定については次回のメモで述べるつもりである。

## 4 理論の心髄

特殊相対性理論は様々な革新的な帰結を示すが、従来の時空に関する人間の知識を改めたその本質的な観点は、この運動している系における時間が静止する系の時間と座標に依存するとみなした点にある。空間座標の依存性についてはすでにガリレオによって導入されていた。ところが運動物体の上の時間については静止系の時間以外に座標の関数とみなす観点がなかった。アインシュタインのこの観点がその後の時空の認識を変革する重要なポイントになったのである。

数学上の表式については、実はアインシュタインの前に同じ形式で表現した科学者がいることはよく知られている。1892年にローレンツは「マックスウエルの電磁理論と運動物体への応用」を書き、1904年には座標と電磁場のローレンツ変換に到達していた。ローレンツが導いた局所時間はまさにアインシュタインが書いた  $\gamma t$  と同じ数学表現であった。ところが彼はそのような時間は実際の時間ではないとみなしてしまった。ローレンツは1915年の「電子論」第2版に次のように書いているという。 [2]。

私の失敗の主要な原因は、変数  $t$  だけが真の時間とみなすことができ、私の局所時間  $t'$  は単なる数学的な補助的な量とみなさなければならないという考えを捨てきれなかったことにある。アインシュタインはその逆で  $t'$  は  $t$  と同じ役割を果たす。

さて、アインシュタインが導入した時間という物理的実態は次のように解釈することができる。ある事柄の空間上の存在確定は常に光速によって行われると規定することに等しい。それまでの概念では時間は空間によらずあらゆる場所で確定するものであった。従ってある時点で事象が存在確定すればその瞬間に一斉に全空間に存在確定するという仕組みになっていた。アインシュタイン以前の科学者にはそのような時間と空間のとらえ方しかできなかつたのである。これを「1時点全空間存在確定」のパラダイムと呼ぼう。アインシュタインの同時性の導入によって、光速によって信号が伝わることによって各空間点に存在確定するという概念に置き換えられたのであった。ここでは空間上の存在確定は同時刻に対して光信号伝播の球面上でいたるところ存在確定する構造になっている。いわゆる光円錐による存在確定が行われ、特定の方向のみを選ぶということがないのである。これを「1時点多方向存在確定」のパラダイムと筆者は呼ぶ。ここでは座標の原点の採り方を固定したとき、任意の座標方向の選び方に対して対称性を保証する。

## 参考文献

- [1] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. der Phys. 17(1905), pp.891-921, 日本語訳, 「運動している物体の電気力学について」, アインシュタイン選集1 湯川秀樹 監修, 中村・谷川・井上 訳編, pp.19 共立出版 (1971)
- [2] 太田浩一, 松井哲男, 米谷民秋明 (編), 「アインシュタインレクチャーズ@駒場」 東京大学教養学部特別講義, pp. 17, 東京大学出版会 (2007)