

量子論・古典論の統一はできるか
第 II 部 古典力学との連続性 [付録]

松原 邦彦

2023 年 3 月 31 日

目次

付録 A	73
A.1 静止および移動する源による SP-ラインの伝播の計算	73
A.2 自由粒子の波動関数のグラフ (図 3.3) 計算アルゴリズム	73
A.3 移動する源の SP-ライン間隔の引きずり効果による変化のグラフ化	75
参考文献	79

付録 A

A.1 静止および移動する源による SP-ラインの伝播の計算

SP-ラインの伝播距離を r_0 とし、時間とともに回転する角度を θ_0 とするとき、粒子を静止するように見る系 (x_0, y_0, t_0) (粒子と共に飛行する系) からみて SP-ラインの伝播前線は

$$r_0 = ct_0 \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_0 = \omega_s t_0 \quad (\text{A.2})$$

である。ここで ω_s は回転放射の角速度、 t_0 は信号が源を発した時刻から r_0 に到達するまでの伝達時間である。静止系では

$$x_0 = r_0 \cos \theta_0 \quad (\text{A.3})$$

$$y_0 = r_0 \sin \theta_0 \quad (\text{A.4})$$

である。一方、観測者の系を x, y としたとき、伝播前線の座標は相対論的に取り扱われ、第 II 部 2.6 節の (2.47), (2.48) で表される。そこで使われている t_0 は信号が 0 秒に源を出て観測系到着した時刻として定義されている。

SP-ラインの伝播前線のプロットはある時刻における空間上の分布を、 t_0 をパラメータとして表そうとするものであるから、プログラムを簡単に書くため、次のような座標系に置き換える。まず与えられた時刻を $t = 0$ とし、画面中央を原点にとる。 $t = 0$ の時の源の位置座標を x_{00}, y_{00} とし、空間上の各点の SP-ラインが源を発した時刻を t_0 とする。時刻の取り方はプロットの順序と関係する。このプログラムでは源に近い伝播前線から順に距離が離れた伝播前線へとプロットするから t_0 は順に時間軸上をさかのぼっていくことになる。そこでプロットすべき点の座標は

$$x = x_{00} + \gamma(r_0 \cos \theta_0 - vt_0) \quad (\text{A.5})$$

$$y = y_{00} + r_0 \sin \theta_0 \quad (\text{A.6})$$

となる。

A.2 自由粒子の波動関数のグラフ (図 3.3) 計算アルゴリズム

ベクトル r_0 をパラメータとして速度 v で飛行する自由粒子の波動関数を 2 次元平面 $x - y$ の上にドットの密度として計算し表示する計算アルゴリズムを以下に示す。原点 (x_0, y_0) から距離が r_0 で x 軸との間の角度が θ_0 の点を考える。いまこの点を中点として、微小な角度 $\delta\theta$ をとり、この角が張る半径 r_0 の微小な

弧 ad をとる。さらに角度 θ_0 に沿ってベクトル r_0 方向に長さが dL の辺 ab をとる。これを一辺として図 A.1 に示すような微小な面積 ds を採る。するとその面積は次式によって表される。

$$ds = \pi(r + dL)^2 - r^2 \frac{\delta\theta}{2\pi} = \frac{(2r + dL)dL}{2} \delta\theta \quad (\text{A.7})$$

この面積の上に波動関数の大きさに比例したドット数をプロットすることを考える。従ってこの面積は場

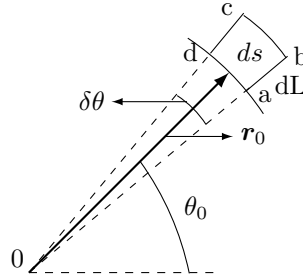


図 A.1 (r_0, θ_0) 点に隣接した微小な面積 Δs

所 r_0 に依らず一定でなければならない。予め小さな ds を与えて、この面積を一定にするように $\delta\theta$ を決めるとしよう。(A.7) で ds と dL を与えて $\delta\theta$ を求めると

$$\delta\theta = \frac{ds}{(r + 0.5dL)dL} \quad (\text{A.8})$$

ここで dL は SPL ノード長さ $\Lambda_s = 2\pi c/\omega_s$ 程度を与え

$$dL = \frac{2\pi c}{\omega_s} \quad (\text{A.9})$$

とする。 ds は dL の平方程度を考え

$$ds = dL^2 \quad (\text{A.10})$$

とする。この ds 上に波動関数の実数部の 2 乗に相当したドット数

$$m = af^2 \quad (\text{A.11})$$

を乱数を使って均等に配置する。ここに f は本文 (3.65) で表される波動関数の実数部の 2 乗であり、 a は画面上のドット数を適切な濃度にし、見やすくするための調整パラメータである。

r を一定にして θ を回転させると、 2π が必ずしも $\delta\theta$ で割り切れないため 1 周毎に不連続部分が生じる。これを避けるため A.1 で取り扱ったように

$$r_0 = ct_0 \quad (\text{A.12})$$

$$\theta_0 = \omega_s t_0 \quad (\text{A.13})$$

として螺旋に沿って平面を連続的にスイープする。 r_0 は回転角とともに増加するため、1つの計算メッシュ内の面積 ds が r_0 を一定としたときと違って歪んでくる。ドットを打つべき点を (r', θ') とし、補正すべき量を δr として計算すると次のようになる。

$$\delta r = r' - r_0 = c(t' - t_0)$$

r' , r_0 は (A.12) を満たすことから、 $t' = r'/c$, $t_0 = r_0/c$ の関係にある。 t' , t_0 はまた (A.13) を満たすから、 $t' = \theta'/\omega_s$, $t_0 = \theta_0/\omega_s$ したがって

$$\delta r = \frac{c}{\omega_s}(\theta' - \theta_0) \quad (\text{A.14})$$

乱数によって ds 内にばらまかれた m 個のドットの座標点は上の補正を加えて

$$\theta' = \theta_0 + \delta\theta * (Rnd - 0.5) \quad (\text{A.15})$$

$$r' = r_0 + dL * Rnd + \delta r \quad (\text{A.16})$$

と計算する。ここに Rnd は 0 から 1 の間の乱数発生関数である。

プロットではバックグラウンドを黒くし、ドットを白点とした。つまり本文 (3.65) で表される波動関数の実数部の 2 乗の値が高い部分を明るく示すようにしてある。

A.3 移動する源の SP-ライン間隔の引きずり効果による変化のグラフ化

図 3.4 では飛行する源と静止する源の SP-ラインの伝播前線の重畳を示すことによって、隣り合う SP-ライン間隔の引きずり効果による変化幅が縞模様を作ることを定性的に示した。ここではこの変化幅の大きさをグラフ化する。運動する粒子については相対論的に取り扱う。

A.1 での取り扱いと同様に SP-ラインのトラジェクトリ (A.1), (A.2) に沿って場の伝播空間を時間 t_0 とともに回転するベクトル r_0 によってらせん状に掃引する。計算に関わる諸量の関係を図 A.2 に示す。

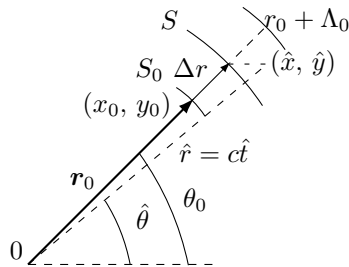


図 A.2 グラフ化する量 Δr の計算図

静止する源による SP-ラインの r_0 点における x_0, y_0 座標は (A.3), (A.4) である。一方、速度 v で飛行する源による SP-ラインの r 点における (x, y) 座標は (A.5), (A.6) である。 r_0 の延長上にあつて掃引の基点 (x_0, y_0) に最も接近する飛行粒子の SP-ライン S 上の点 (x, y) を探し出し、そこまでの距離 Δr を求める。探索の条件は

- (1) r_0 の延長線上にあること。
- (2) (x_0, y_0) から Λ_s 以上離れていないこと。

である。

点 (x_0, y_0) および時間 t_0 が与えられたものとし、求める点 (x, y) は点 (x_0, y_0) より先行する飛行粒子の SP-ラインが引きずり効果によって (x_0, y_0) 点の近傍に来ていると予想する。点 (x_0, y_0) より先行する飛行

粒子の伝播時間を \hat{t} として、この時間の伝播が引きずられて (x, y) 点にきていると想定すれば、

$$\begin{aligned}x &= \gamma(\hat{r} \cos \hat{\theta} - v\hat{t}), \\y &= \hat{r} \sin \hat{\theta}.\end{aligned}$$

である。ここで $\hat{r} = c\hat{t}$ が成立するから

$$x = \gamma(c\hat{t} \cos \hat{\theta} - v\hat{t}), \quad (\text{A.17})$$

$$y = c\hat{t} \sin \hat{\theta}. \quad (\text{A.18})$$

上2式から $\hat{t}, \hat{\theta}$ について解こう。(A.18) から $\sin \hat{\theta} = y/(c\hat{t})$ であるから

$$\cos \hat{\theta} = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\theta}} = \sqrt{1 - y^2/(c\hat{t})^2} \quad (\text{A.19})$$

上式を (A.17) に用いた上で平方根をとり、 \hat{t} について整理すると

$$c^2\hat{t}^2 - 2v\gamma x\hat{t} - (\gamma^2 y^2 + x^2) = 0$$

\hat{t} について解くと

$$\hat{t} = (\gamma v x \pm \sqrt{(\gamma v x)^2 + c^2(\gamma^2 y^2 + x^2)})/c^2$$

平方根の中を整理し、 $(v^2/c^2)\gamma^2 + 1 = \gamma^2$ であることを考慮すれば

$$\hat{t} = \gamma \frac{(v/c)x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{c} \quad (\text{A.20})$$

一方で上記条件 (1) によってこの点は角度 θ_0 の線上にあるから

$$x = (r_0 + \Delta r) \cos \theta_0, \quad (\text{A.21})$$

$$y = (r_0 + \Delta r) \sin \theta_0. \quad (\text{A.22})$$

も満たしている。これを (A.20) の右辺に用いると

$$\hat{t} = (r_0 + \Delta r) \frac{\gamma}{c} \left(\frac{v}{c} \cos \theta_0 \pm 1 \right) \quad (\text{A.23})$$

ここで右辺括弧内の負符号は \hat{t} の値を負にする故、これを取り除く。(A.18) の y に (A.22) を、 \hat{t} に上の式を用いると

$$\sin \hat{\theta} = \frac{\sin \theta_0}{\gamma \left\{ (v/c) \cos \theta_0 + 1 \right\}} \quad (\text{A.24})$$

ここで

$$\hat{\theta} = \omega_s \hat{t} \quad (\text{A.25})$$

であるから (A.23) を上の式に用いると

$$\hat{\theta} = \frac{\omega_s}{c} (r_0 + \Delta r) \gamma \left(\frac{v}{c} \cos \theta_0 + 1 \right) \quad (\text{A.26})$$

上式を Δr について解くと

$$\Delta r = \frac{c}{\omega_s} \frac{\hat{\theta}}{\gamma \left\{ (v/c) \cos \theta_0 + 1 \right\}} - r_0 \quad (\text{A.27})$$

ここに $\hat{\theta}$ は (A.24) の解であり、

$$\hat{\theta} = N\pi + (-1)^N \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta_0}{\gamma\{(v/c) \cos \theta_0 + 1\}}\right) \quad (\text{A.28})$$

である。ここに $\sin^{-1}(x)$ は主値を示す。さて N を求めたいのであるが任意に与えられた π を越える角度 $\hat{\theta}$ に対して N を求める方法はない。そこで与えられた θ_0 をたよりに推定する。 $\hat{\theta}$ は r_0 の近傍において 2π だけずれたもののどれかを探ることになるから上式の表現では具合が悪い。そこで上式の代わりに

$$\hat{\theta} = 2\pi\hat{n} + F(\theta_0), \quad \hat{n} = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.29})$$

という表現を用いる。このためには $F(\theta_0)$ を次のように定義すればよい。

$$\begin{aligned} F(\theta_0) &= \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta_0}{\gamma\{(v/c) \cos \theta_0 + 1\}}\right), \quad 0 \leq (\theta_0 - 2\pi n) < \pi/2 \\ &= \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta_0}{\gamma\{(v/c) \cos \theta_0 + 1\}}\right), \quad \pi/2 \leq (\theta_0 - 2\pi n) < 3\pi/2 \\ &= 2\pi + \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta_0}{\gamma\{(v/c) \cos \theta_0 + 1\}}\right), \quad 3\pi/2 \leq (\theta_0 - 2\pi n) < 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

ただし n は $\theta_0 = 2\pi n + \Delta\theta$, $0 \leq \Delta\theta < 2\pi$ と表したときの整数で

$$n = \text{Int}(\theta_0/2\pi) \quad (\text{A.31})$$

である。ここに Int は () 内の実数を整数化することを表す。

残る問題は (A.29) における \hat{n} の推定である。これには条件 (2) を用いる。この条件によれば $0 < \Delta r < \Lambda_s$ 、つまり Δr の上限として Λ_s を与えたときの $\hat{\theta}$ を $\hat{\theta}_{max}$ とすれば (A.26) より

$$\hat{\theta}_{max} = \frac{\omega_s}{c} (r_0 + \Lambda_s) \gamma\left(\frac{v}{c} \cos \theta_0 + 1\right) \quad (\text{A.32})$$

と対応する。一方 (A.29) より

$$\hat{\theta}_{max} > 2\pi\hat{n} + F(\theta_0) > \hat{\theta}_{max} - 2\pi$$

したがって

$$\hat{n} = \text{Int}\{[\hat{\theta}_{max} - F(\theta_0)]/2\pi\} \quad (\text{A.33})$$

と推定する。これにより (A.27) は最終的に

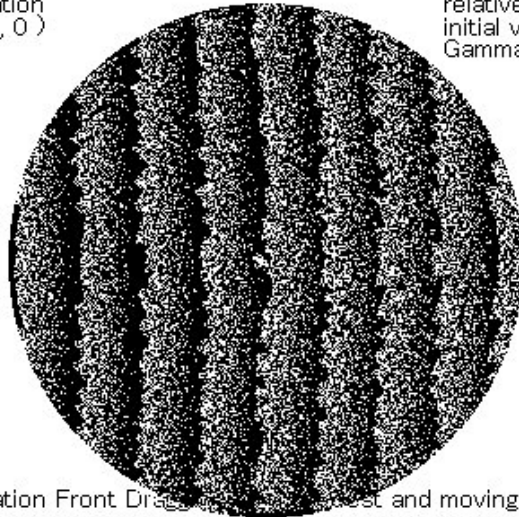
$$\Delta r = \frac{c}{\omega_s} \frac{2\pi\hat{n} + F(\theta_0)}{\gamma\{(v/c) \cos \theta_0 + 1\}} - r_0 \quad (\text{A.34})$$

によって計算される。

プロットの順序は A.2 に述べた方法と同じで、 $r_0 = ct_0$, $\theta_0 = \omega_s t_0$ の螺旋に沿って平面を連続的にスイープする。プロットは A.2 と同じくバックグラウンドを黒くし、ドットを白点とする。つまり隣り合う SP-ライン間隔の引きずり効果による変化幅 Δr (A.34) が高い部分を明るく示すようにしてある。プロットの一例を図 A.3 に示す。

source location
(x0,y0)=(0 , 0)
knode= 2

relative velocity
initial v/c = 0.1
Gamma=1.00504



Propagation Front Direction, Propagation Front and moving source

図 A.3 隣り合う SP-ライン間隔の引きずり効果による変化幅, Δr

参考文献

- [1] 第3章の文献 [6] 参照。
- [2] J.C ポーキングホーン「量子力学の考え方」宮崎 忠 訳 講談社 (1987) p.208, 第8章にボーアとアージ・ペーテルセンという友人との個人的会話であるとして紹介されている。この引用はさらにマックス・ヤンマー著、「量子力学の哲学」からのものである。
- [3] 並木美喜雄、「量子力学の観測問題をめぐって」、日本物理学会誌 第37巻第7号 (1982), p.535. a) として v.Neumann, E..P. Wigner を挙げ、b) として H.S. Green, A. Daneli, A. Loinger, G.M. Prosper, L. Rosenfeld を挙げている。これらの論文のいくつかは「新編物理学選集 69 量子力学における観測の理論」、日本物理学会、東京、1978 に収録されている。並木美喜雄、「観測問題とその周辺」、数理科学 No. 392 Feb. 1996 サイエンス社, p.5 にもその解説がある。
- [4] E.P. Wigner, "Remarks on the mind-body question", in *The Scientist Speculates*, p. 284-302, edited by I.J. Good, Heinemann, London(1961)
- [5] ロジャー・ペンローズ著、「心は量子で語られるか」中村和幸 訳 p.132 講談社 (1998) Original: Roger Penrose, "The Large, the Small and the Human Mind" Cambridge University Press (Cambridge)
- [6] Born, M. *Atomic Physics* (Blackie, 1944)(ボルン「現代物理学」鈴木、金 関 訳 みすず書房. ボルンの考え方を解説したレポートはほかにも見られる。例えばバスティン編「量子力学は越えられるか」柳瀬睦男、他 訳 東京図書 (1973) "QUANTUM THEORY AND BEYOND", edited by Ted Bastin, Cambridge University Press, London (1971) の p.4. その他、ピーター・ギビンス「量子論理の限界」、金子 務、宇多村俊介訳、産業図書 (1993), p.81. Original: Peter Gibbins, "Particles and Paradoxes, The Limits of Quantum Logic, Little Ldd, London(1987)
- [7] Christopher A. Fuchs and Asher Peres, *Quantum Theory Needs No 'Interpretation'*, *Physics Today*, Vol.53, No.3 (March 2000) American Institute of Physics p.70
- [8] 井本信之「量子力学の解釈問題」、数理科学 (特集 波動関数のミステリー)、Vol.7, サイエンス社 (2002.7), P.52. それぞれの解釈問題の旗手にインタビューしたときの記事。「ボームに聞く」を参照。
- [9] 第3章参考文献 [10] 参照。
- [10] 和田純夫「状態の共存と波動関数の解釈」 数理科学 (特集 波動関数のミステリー) Vol.7, サイエンス社 (2002.7), P.7