

量子論・古典論の統一はできるか
第 II 部 回転放射の場の理論 [第 2 章]

松原邦彦

2024 年 9 月 18 日

目次

第 2 章	1 時点 1 方向確定の理論	15
2.1	1 時点 1 方向の仮説	15
2.2	回転放射する場の時空構造	17
2.3	スパイラルパルスライン (SP-ライン)、および SPL ノード流れ	18
2.4	移動する源による SPL ノード流れの場	19
2.5	SPL ノード場と運動力学的な量との関係	22
2.6	SPL ノード放射の回転角速度、プランク定数、質量	24
2.7	回転放射する場における光行差の発生	26
2.8	SPL ノードの場におけるスピン角運動量の存在	28
2.9	荷電粒子および中性粒子のスピン磁気モーメント	30
参考文献		33

第2章

1 時点 1 方向確定の理論

2.1 1 時点 1 方向の仮説

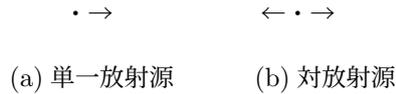
1つの仮説を導入するに当たって従来理論における1つの問題点を指摘しておこう。相対性理論によれば、距離 r だけ隔たった2点間の事象は全く同時には確定せず、 r/c 秒後に光が到達した時点で確定するという同時性の概念が採用されている。この概念によれば方向に関する区別は一切なく、したがって t を指定すればどの方向に対しても、源の存在する点から距離 $r = ct$ で表される全ての点上で場が同時に確定する。観測者の置かれる点 O に関して時刻 t に同時性が確定する点を全て連ねると半径 ct の球表面ができる。1 時点に1 球面（三次元空間における全方向）に対して存在の確定が行われることを意味しており、空間2次元 + 時間座標で表される光円錐として幾何学的に表現されている。

この概念の中には一つの不合理と思える状況が存在する。1つの点がすべての方向に対して、存在の確定のために信号を同時に送り出すことは、同時に無限に多くのプロセスを必要とする。光円錐で言うと、円錐をある時間 t で輪切りにした円周上では方向が異なるにもかかわらず同時性が成立している。これを実現するには各方向について信号放射を分担する無数のプロセスが必要である。素なる過程でこのようなことが起こり得るとしたら、それは素ではなく、無数のプロセスの集合である。無数のプロセスを点としての素粒子の中に閉じこめると、もはやそれは素粒子という表現とは矛盾する性質の粒子となり、その属性として付加される物理量は無限大の値を採らざるを得ない。古典的な場の理論における源の点発散の困難はこのことに起因していると考えられる。そこで次の仮説を導入する。

仮説 II 物理事象の素過程においては1時点において一方向にしか存在が確定しない。

この仮説のもとに、一つの素粒子が固有の空間を創生する過程を考えると、次の2つの形態が考えられる。(1) 非常に短い時間間隔で全くランダムに方向が選択されるか、または(2) 連続的に方向が選択されるか、である。我々が経験する世界においては、ランダムな方向選択はその背後に非常に複雑なメカニズムの存在を認めるのが通常である。複雑な内部構造をもつ過程は、いわゆる「素過程」と呼ぶにはふさわしくないと考えると、素過程においては連続的な回転によって存在確定信号が播布されると考える方がよい。このような伝播のしかたは巨視的世界にもいくつかのアナロジーを見ることができる。一つの例は芝生に水を撒くスプリンクラーである。古典論的な場の源はあらゆる方向に水を吹き出す無数の細孔をもったジョウロに似ており、これに対してこの理論が主張する場の源は一つかせいぜい二つの放水の穴（ピンホール）しか持たないが、高速回転することによって極く短時間に万遍なく地表に撒水することができるスプリンクラーに似ている。もし放水孔が一方向であれば放射ヘッドは不安定である。穴が二つで180度異なる方向

に対になっていれば源であるヘッドは安定して回転する。いま考えている素粒子の場合、このような素過程によって信号放射すると仮定するのである。単一方向の放射源だと素粒子が安定に存在するには確かにバランスを欠いている。しかし素過程である k とを優先すれば (a) が本質的である。一方 1 つの源が安定して存在するためにはこれが対になって、互いに反対方向に向いている下記の (b) のような源の方が好ましい。このような (b) の形態は複合粒子になると考えると都合がよい。現時点では (a) が素粒子の基本形と見做して考察する。



これらの描像では、時空間は完全な連続体である。従来いくつかの試みがされたような離散的な時空を仮定するのではなく、場の源となる素粒子によってその固有空間が連続的に創生されている。図 2.1 はある瞬間に x, y 座標空間上で存在確定信号が伝播していく様子を描いたものである。図に示したように、ある瞬間

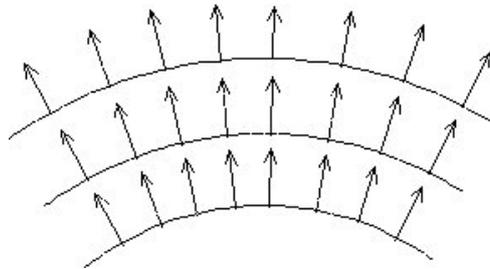


図 2.1 存在確定信号の伝播

間には連続な空間に場が離散的に存在する。しかしそれは 4 次元時空連続体の時間軸上のある断面上のことであって、全ての確定信号は矢印の方向に光速で伝播するから、空間はこの信号によって掃引されている。作用を受けるもう 1 つの場の源も同様の存在確定の信号を放射しているから、空間上のかなり広い範囲で各時刻に相互作用が連続的な事象として存在する。相互作用に与かる 2 つの事象がこの間隔以上に微細な場を持つとき、初めて量子的な特定の効果を持ち、そうでないときは従来の古典的な連続場の振舞いと一致することが期待される。

上記の仮説を前提にして、3 次元空間のあらゆる方向に対して等方的に相互作用を及ぼす場の源をどのように組み立てることができるであろうか。等方向性をもつ場の源は無数の素粒子の集団によって実現されるか、でなければ 1 つの素過程によって時分割で実現される。あるいはその両方であろう。この状態を巨視的時間によって計測するとき実現する。全方向を網羅するには、熱的なゆらぎによって回転軸が、例えば z 軸の回転が他の軸、 x および y 軸の回りにランダムに振られる必要がある。そうすれば伝播方向がランダムに揺らぎ、十分ランダムであれば巨視的に等方的な事象として現れるであろう。しかしながら以下の節では、まず熱的揺らぎが無い、単独の源を考え、確定信号は x, y 空間にのみ分布した時に現れるふるまいを検討し、後に 3 次元分布するときの事象を検討することにしよう。

2.2 回転放射する場の時空構造

ここで考える場の源は1つかまたは2つの素過程から成り立っている考えよう。各素過程は同時刻に1方向にしか確定できないとし、方向に関する連続性を持たせるため、点源が存在確定する信号の放射する方向を回転させているとする。1つの素過程は1点から信号を放射し、その回転速度を ω_s とする。回転角 θ は角速度 ω_s と経過時間 t によって

$$\theta = \omega_s t \quad (2.1)$$

と表され、放射された存在確定信号は $r = ct$ で伝播するから、信号の伝播前線は螺旋の方程式

$$r(\theta) = ct = \frac{c}{\omega_s} \theta \quad (2.2)$$

によって記述される。1つの素過程からの信号の周辺への伝播の様子を空間的に連続な線分によって模式的に表したものが図2.2(a)である。対となる2つの素過程が源にあるとき図2.2(b)に示すような分布となる。これらの図では k_e を源を持つ素過程の数として(2.1)の θ と(2.2)の r を用いて

$$\theta_k = \theta + 2\pi \frac{(k_e - 1)}{k_e} \quad (k_e = 1, 2) \quad (2.3)$$

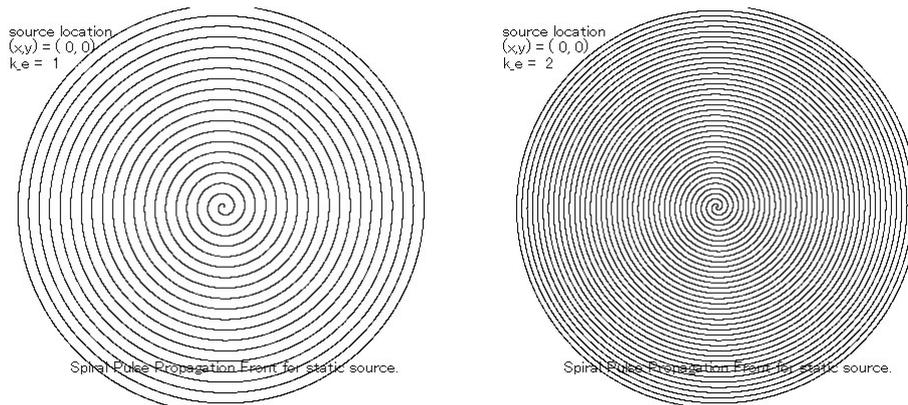
とし、 t をパラメータとして

$$x = r \cdot \cos(\theta_k) \quad (2.4)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta_k) \quad (2.5)$$

$$z = 0 \quad (2.6)$$

をプロットしたものである。これらの螺旋線条はすべて周辺に向って光速で伝播しており、同図はある時間的断面を示している。



(a) 1点から1条放射の場合 ($k_e = 1$) (b) 1点から2条放射の場合 ($k_e = 2$)

図 2.2 回転しながら信号を放射する源

回転放射する信号の伝播の状態を時間-空間座標上に表示してみよう。図2.3(a)は従来の古典電磁理論による光円錐で、全方向に同時に確定する場合を示している。確定信号の伝播前線は円形である。コーンは確

定信号で隙間なく埋め尽くされ、第 I 部第 4 章 4.1 節で取り扱ったように分節線のノード流速密度は点源において発散する。

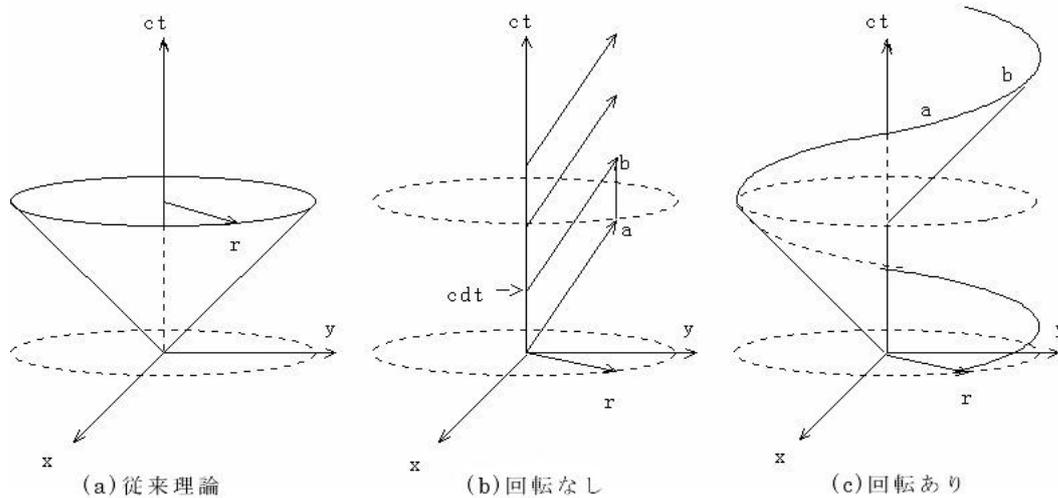


図 2.3 場の伝播状態の時間-空間表現を示す。 $(k_e = 1)$

図 2.3(b) は 1 時点に 1 方向の確定の理論に従うが回転のない場合を示している。放射は一方向に固定されており、このような物理系はここでは意味を持たないが、場の源に関するモデル (a) から、次の回転放射する場合への中間的な橋渡しをする目的で示している。信号の放射を示す線は時間軸上に連続に存在し、時間-空間座標上で平面を構成する。信号の伝播方向に対して 1 本の線が引けるから、第 I 部 4 章 4.1 節の定義 V に従った分節線を考えることができる。放射される分節線はたった 1 本しかないから、単位時間に放射される分節数を源の大きさとしてことができ、どのような分節長さを選んでも源の発散は考えられない。

図 2.3(c) は回転放射の場合を示す。4次元時空連続体上で 1つの捻れた連続面を構成し、相対性理論でいう同時性はこの面上でのみ成立する。素過程が対の場合には同様の面分が中心線に対して対称形に現れる。空間的に連続な線は (2.2) 式によって表される螺旋線条、つまり信号の伝播前線である。空間的にはこの線分に沿ってのみ場が連続になる。このような場合、分節線とそのノード数をどのように採るべきかについて次節で検討することにしてしよう。

2.3 スパイラルパルスライン (SP-ライン)、および SPL ノード流れ

前節に示した回転放射する場を考えよう。点源から距離 r のところに静止している点 $O(r, \theta)$ を観測点とすれば、この観測点が受ける信号は決して連続性をもたない。確定信号の伝播前線が、図 2.4 に示すように θ 方向へ、パルス状に通過していく。そこで次の量を定義する。

定義 XI [スパイラルパルスライン (Spiral Pulse Line :SP-Line)] : 回転放射する確定信号の伝播前線を連ねた線をスパイラルパルスライン (以下 SP-ラインと略す) と呼ぶ。

SP-ラインはいわゆる通常のパルス信号に過ぎないが空間的には螺旋状に連続しているのでラインと呼ぶにふさわしい。

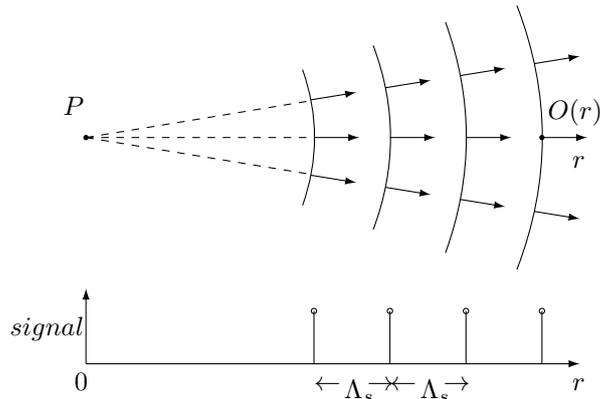


図 2.4 スパイラルパルスラインの断続的な通過。($k_e = 1$)

第 I 部 4.1 節において、源から放射される信号の伝播方向に 1 本の線を引いて、これに区分線を入れて、分節線を定義した。これと同じように、源から放射された SP-ラインは光速で r 方向へ伝播する。その伝播方向へ線を引くと次のような分節線が定義できる。

定義 XII [SPL 分節線]: SP-ラインの伝播方向に沿って 1 本の線を引く。これをパルスの飛来間隔 Λ_s 毎に分節した線を SPL 分節線と呼ぶ。ここに

$$\Lambda_s = \frac{2\pi c}{\omega_s} \quad (2.7)$$

である。

第 I 部の理論ではノードは源を中心に同心円に分節されたのに対し、ここでは SP-ラインが分節を形成する。

定義 XIII [SPL ノード]: 分節された 1 分節を SPL ノードと呼ぶ。

1 本の SPL 分節線は単位長さ当たり (単位長さ)/ Λ_s 個のノードを持ち、1 本の分節線当たり 1 秒間に

$$\nu_s = c/\Lambda_s \quad [\text{nodes/unit_time}] \quad (2.8)$$

のノードが放射される。しかしこの場合は確定信号が途切れたとき間隔 Λ_s より短い分節線が形成されることはない。したがって第 I 部 4.1 節に用いたような半端なノードは取り得ない。

2.4 移動する源による SPL ノード流れの場合

SP-ラインの基本的性質を検討するには、絶対温度がゼロであるか、または特定の条件によって SP-ラインの放射面が一平面内に拘束されている場合を考えると都合がよい。結果的には熱運動などによって SPL ノードがランダムに 3 次元的に分布する場合でも以下に分析する性質は保存されるのであるが、しばらくの間 (2.9 節まで)、イメージを描きやすくするために、このような条件を満たすとした上で諸性質を検討する。源となる粒子が持つ素過程の数については断わりがない限り $k_e = 1$ を考える。

SPL ノード流れはサイン波のような波動ではない。 Λ_s という間隔を持ったノードの流れで、常に光速 c で伝播するパルス状の信号連なりである。そうすると様々な数理解析に必要な微分操作が使えなくなってしまう。解析性を持たせるためには従来の量子力学のように周期的現象を波動現象として表現することが必要

になる。そこで SPL ノード流れを連続的な信号、波動現象として取り扱うため、次のような置き換えを行なおう。図 2.5 の上段に示すようにあるサイン波の二乗のピーク値がスパイラルパルスラインの位置に来るように波動関数を設定する。なぜサイン波の二乗であるかという、スパイラルパルスラインは実在のパルス信号であり、複素数である波動関数で表現するとすれば、それぞれの位置で正の実数にならなければならないからである。このようにして適用されたサイン波はそのピークのみが実在のスパイラルパルスラインの存在を示し、ピーク以外の値は連続性を持った微分可能な関数値を構成する役割を担うに過ぎない。言い換えるとパルス信号を乗せて時空間を伝送、伝播させる数学的な表現媒体として役割を果たす。この波動関数を

$$\psi = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.9)$$

としよう。ここに \mathbf{k} は波数ベクトルである。 \mathbf{r} は観測系の観測点の空間座標ベクトル (x, y, z) を示している。図 2.5 の上段にはこのような関数の二乗 ψ^2 を、同図の下段には関数 ψ の波形を対象とするパルス信号とともに示した。いまスパイラルパルス信号の源が固有の放射回転角速度 ω_s を持っているとして、放射回転 1 回転につき SP-ライン放射が等間隔で k_e 回あるとすれば観測点における SP-ラインパルスの到来頻度は

$$\nu = \frac{\nu_s}{2} \quad (2.10)$$

となり、対応する角速度は

$$\omega = \frac{\omega_s}{2} \quad (2.11)$$

となる。 ω_s を規定するには一つの理論を必要とするが、それは 2.6 節で取り扱うこととする。

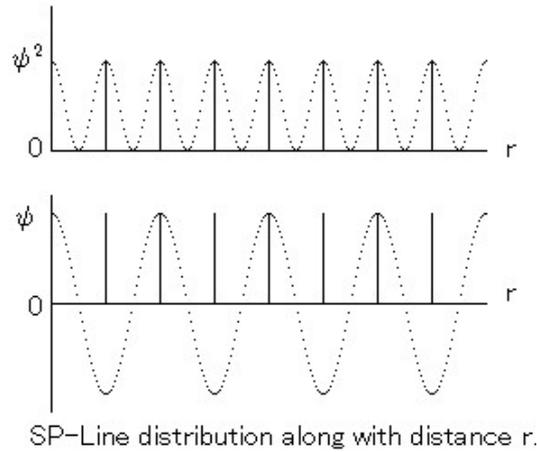


図 2.5 パルス状信号をサイン波の二乗 ψ^2 で置き換える。

パルス信号の伝播速度は光速 c であるから (2.9) の波動 ψ の波数は

$$c|\mathbf{k}| = ck = \omega \quad (2.12)$$

となり、ベクトル \mathbf{k} の方向は波面の伝播方向を採るとして定義され、波面は素粒子の存在する位置から遠ざかる方向を向いている。これは分節されたノードの伝播の方向であって第 I 部 2.1 図に示す方向 \mathbf{r} または \mathbf{r}^0 と同じである。式 (2.9) で表される粒子は観測者に対して静止していると見做しているから K^0 系を基準

にして Ω^0 を距離の比 r^0/r^0 とすることとしよう。式 (2.2) によれば飛行粒子を静止する様にみる系において $r^0(\theta) = c\theta/\omega_s$ であり、(2.12) によれば $c/\omega_s = 1/(2|k^0|)$ である。従って $r^0 = \theta/(2|k^0|)$ 。故に

$$\Omega_t^0 = |\Omega^0| = \frac{|r^0|}{r^0} = \frac{\theta c/\omega_s}{\theta c/\omega_s} = \frac{|k^0|}{k^0}$$

である。そうすると

$$\Omega^0 = \frac{k^0}{k^0}, \quad \Omega_t^0 = \frac{|k^0|}{k^0} \quad (2.13)$$

$$\Omega = \frac{k}{k^0}, \quad \Omega_t = \frac{|k|}{k^0} \quad (2.14)$$

が成立し、

$$k = k^0 \Omega \quad (2.15)$$

$$k = k^0 \Omega_t \quad (2.16)$$

と表すことができる。第 I 部 2.1 節の図 2.1 で取り扱ったように、源を原点に置き、観測点を $O(x, y, z)$ とする座標系を採用すると第 I 部 2.3 節に示したように、K 系と K^0 系との間にローレンツ変換

$$\Omega = \Omega^0 + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \Omega^0) \mathbf{v} + \gamma \Omega_t^0 \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (2.17)$$

$$\Omega_t = \gamma \left(\Omega_t^0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \Omega^0}{c} \right) \quad (2.18)$$

が成立する。ここに

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.19)$$

である。

式 (2.15)~(2.18) により次の変換式が成立する。

$$k = k^0 \left(\Omega^0 + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \Omega^0) \mathbf{v} + \gamma \Omega_t^0 \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad (2.20)$$

$$k = k^0 \gamma \left(\Omega_t^0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \Omega^0}{c} \right) \quad (2.21)$$

ここで (2.12) より $k^0 = 2\pi\nu^0/c$, $k = 2\pi\nu/c$ であるから (2.21) は

$$\nu = \gamma\nu^0 \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \Omega^0}{c} \right) \quad (2.22)$$

となる。

ドップラー効果による変化 [1] は一般のテキストでは

$$\nu^0 = \gamma\nu \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c} \right)$$

と表されているが、これは光源である天体が静止していて、それを速度 v で移動する地球を K^0 系としてそこから観測するという設定の下で表現し、 $\mathbf{v} \cdot \Omega^0 = v \cos \theta$ と見做したものである。ここに取り扱う系の設定によれば (2.22) は SP-ラインの飛来頻度を周波数と見做した場合の相対論的ドップラー周波数の変化に相当する。両者は同じ現象を観測者の立場を変えて表現したものである。そうすると波動関数は決して本質的な存在ではなく、本質は SPL ノードの流れであり、波動関数はその飛来頻度など周期的性質を表現する数学的表現であるという解釈が成立する。

2.5 SPL ノード場と運動力学的な量との関係

(2.20) の波数ベクトルと、(2.22) の周波数変化の式を

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^0 + \delta\mathbf{k} \quad (2.23)$$

$$\nu = \nu^0 + \delta\nu \quad (2.24)$$

とおく。ここで便宜のため

$$\eta^0 = \frac{c(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0)}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (2.25)$$

と置けば、(2.12) より $k^0 = 2\pi\nu^0/c$ であり、 $\Omega_t^0 = 1$ であるから

$$\delta\mathbf{k} = 2\pi\gamma\nu^0 \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\eta^0 + 1) \quad (2.26)$$

$$\delta\nu = \nu^0(\gamma - 1) + \nu^0\gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0}{c} \quad (2.27)$$

と置くことができる。(2.26) から \mathbf{v} を求めると

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \delta\mathbf{k}}{2\pi\gamma\nu^0(\eta^0 + 1)} \quad (2.28)$$

であり、(2.27) から $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0)$ を求めると

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0 = c \frac{\delta\nu - \nu^0(\gamma - 1)}{\gamma\nu^0} \quad (2.29)$$

である。飛行粒子の質量を m として (2.28) および (2.29) に掛けると

$$m\mathbf{v} = \frac{mc^2 \delta\mathbf{k}}{2\pi\gamma\nu^0(\eta^0 + 1)} \quad (2.30)$$

$$m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{mc\{\delta\nu - \nu^0(\gamma - 1)\}}{\gamma\nu^0} \quad (2.31)$$

となる。

ここで

$$\epsilon^* = mc^2 \quad (2.32)$$

$$\nu^* = \gamma\nu^0 \quad (2.33)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (2.34)$$

と表記し、さらに便宜のため

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{\delta\mathbf{k}}{\eta^0 + 1} \quad (2.35)$$

と表そう。 $\bar{\mathbf{k}}$ は速度 v が小さい時 $\delta\mathbf{k}$ に漸近する。また上式 (2.31) 右辺分数の分子の中の $\delta\nu - \nu^0(\gamma - 1)$ はその逆数に c を掛けたものを $\bar{\lambda}$ とおいて

$$\bar{\lambda} = \frac{c}{\delta\nu - \nu^0(\gamma - 1)} = \frac{c\Lambda^0}{\gamma(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0)} \quad (2.36)$$

としよう。 $\bar{\lambda}$ は $\delta\nu - \nu^0(\gamma - 1)$ を波動と見た時のその波の波長を意味する。 ν^0 は位相速度 c の波動の周波数であってその波長を Λ^0 とすれば $\nu^0 = c/\Lambda^0$ である。これらの記号を用いると (2.30) および (2.31) は

$$\mathbf{p} = \frac{\epsilon^*}{\nu^*} \frac{\bar{\mathbf{k}}}{2\pi} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{\epsilon^*}{\nu^*} \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad (2.38)$$

となる。

ϵ^*/ν^* は次の様にして速度 v に依存しない定数であることを示すことができる。(2.32) において $m = \gamma m_0$ とし、

$$\epsilon^0 = m_0 c^2 \quad (2.39)$$

とすれば

$$\frac{\epsilon^*}{\nu^*} = \frac{\gamma \epsilon^0}{\gamma \nu^0} = \frac{\epsilon^0}{\nu^0} \quad (2.40)$$

となり、速度には依存しない。この定数を

$$h^* = \epsilon^*/\nu^* \quad (2.41)$$

としておこう。この比の定義はプランク定数の定義に似ているがプランク定数 h そのものとみなすことができるかどうかこれまでの議論では根拠をもたない。この周波数はパルスの飛来周波数であって、量子論に基づく波動の周波数とエネルギーの関係から導いたものではないからである。それにもかかわらずド・ブローイ-アインシュタインの関係式に類似の関係

$$\mathbf{p} = \frac{h^*}{2\pi} \bar{\mathbf{k}} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{h^*}{\bar{\lambda}} \quad (2.43)$$

$$\epsilon^0 = h^* \nu^0 \quad (2.44)$$

が成り立つ。上式 (2.42)~(2.44) が示すことは、SPL ノードの飛来間隔を波数ベクトルに見立てた \mathbf{k} と \mathbf{k}^0 の相対論的变化分と飛来頻度 ν と ν^0 のドップラー変化分 $\delta\nu - \nu^0(\gamma - 1)$ が SPL ノード放射の源である飛行粒子の運動量に関係しており、ある定数に比例するということである。

2.4 節では SPL ノードの伝播を (2.9) のような解析性を持つ波動関数によって数学的に表現することを考えた。その理由は、それによって従来の量子力学との比較、解釈が容易になるからである。しかしながら ν という記号を使っても波動でなく、単位時間あたりの SP-ラインの飛来頻度であるとし、 Λ という長さを使っても波動における波長ではなく、ノード長さであるとしても上記の表現式はそのまま成立する。その場合、波数は (2.7) で表される周期を持った離散的なパルス状の信号の単位長さあたりに含まれる SPL ノード数に 2π を掛けた量である。つまり SPL ノード流れそのものが波動的性格を有する。このことを確かめるために静止する源と移動する源による SP-ラインの重畳した図を示そう。2.2 節に掲げた図 2.2 は観測者、源ともに静止する場合の SP-ラインの伝播の様子を示している。その図の SP-ラインは (2.4), (2.5) によってプロットされたものであった。図 2.6 は源となる粒子が速度 v で走るとき、これを静止する系からみた伝播前線を

$$x = \gamma(x_0 + vt_0), \quad (2.45)$$

$$y = y_0 \quad (2.46)$$

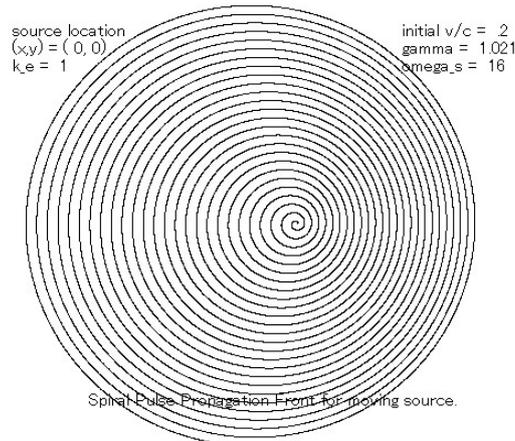


図 2.6 移動する源による SP-ラインの伝播。(移動する源の速度 $v = 0.2c$, $k_e = 1$)

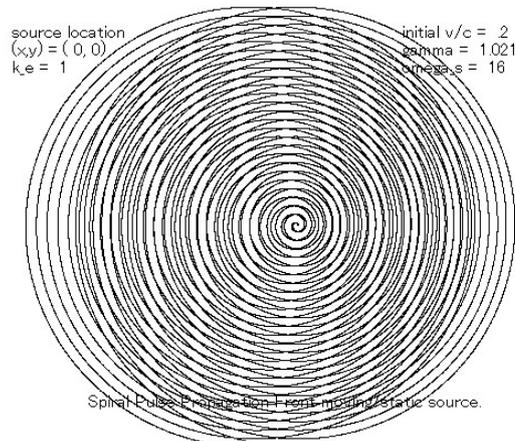


図 2.7 静止する源と移動する源による SP-ラインの伝播。プロットの重畳 ($v = 0.2c$, $k_e = 1$)

としてプロットしたものである。ここに x_0, y_0 は源と共に走る系であり、 $v/c = 0.2$ とし、源がもつ素過程の数 $k_e = 1$ であるとした。図 2.7 は図 2.6(飛行粒子)に図 2.2(a)(静止粒子)を重ね書きしたものである。源の座標はいずれも同じ点上に置いてある。同図には SP-ラインが重なる場所で薄い模様が現れ、SP-ラインが重ならない場所で濃い模様が現れて縞模様を作る。いわゆる引きずり効果による SP-ラインのずれがこの縞模様を形成している。この縞模様の繰り返し幅は (2.36) の $\bar{\lambda}$ に対応し、ド・ブローイ-アインシュタインの関係による波動と密接に関連するのであるが、詳細検討は第 3 章 3.6, 3.7 節に譲り、ここでは飛行する源の SP-ラインの伝播のずれによって波動的性質を説明できる可能性を指摘しておくにとどめる。プロット計算の説明は第 II 部付録 A.1 を参照のこと。

2.6 SPL ノード放射の回転角速度、プランク定数、質量

(2.41) で h^* なる記号を使ったが、これを直ちにプランク定数とみなす根拠はさしあたり無いと述べた。しかしながら、この理論は数値的にプランク定数に一致させるように基本パラメータを選ぶ自由度を持っている。これまでの理論で導入されている未知パラメータは静止している源の ω_s すなわち SPL ノード放射

の固有回転角速度である。この値は (2.11) を通じて ν との間に次の関係で結ばれている。

$$\nu^0 = \frac{\omega_s}{4\pi} \quad (2.47)$$

これを (2.40), (2.41) に用いると

$$h^* = 4\pi \frac{e^0}{\omega_s} = 4\pi \frac{m_0 c^2}{\omega_s} \quad (2.48)$$

となる。

ここで次の系を導入しよう。

系 II - 1 h^* がプランク定数 h に等しくなるように未知パラメータ ω_s を決めることができる。

h^* を h に一致させることができるのは、回転の存在であり、回転角速度の導入において特別の規定をしていないからである。上式の h^* を物理定数 (プランク定数) h で置き換え、その値が

$$h = 6.6260755 \times 10^{-34} (J \cdot s) \quad (2.49)$$

になるように ω_s を規定する。つまり

$$\omega_s = \frac{4\pi}{h} m_0 c^2 \quad (2.50)$$

とすることができる。上の関係は SPL ノード放射の回転角速度が素過程の粒子の質量と比例関係にあることを示している。質量が大きければ回転角速度も大きく、SPL ノードの飛来周期は短くなる。ここに ω_s は回転放射の素過程の数 k_e に依存していることにも重要な意味がある。

この系から導かれるもう 1 つ重要な関係式について示しておこう。式 (2.47) は上の式を使って

$$\nu^0 = \frac{m_0 c^2}{h} \quad (2.51)$$

と書くこともできる。 ν^0 は粒子に対して静止している観測者が観測する SPL ノードの飛来頻度であって、SPL ノードは常に光速で伝播している。従って $c/\Lambda^0 = \nu^0$ の関係が成立している。この関係に上式を組み合わせると波長 Λ^0 に関して

$$\Lambda^0 = \frac{c}{\nu^0} = \frac{h}{m_0 c} \quad (2.52)$$

が得られる。つまり Λ^0 はコンプトン波長と同じになる。

式 (2.27) はドップラー効果による振動数変化分であって、空間的に分布している場に関する物理量である。したがって式 (2.30)、(2.31) において粒子的な質量 m を唐突に掛ける意味は物理学的に曖昧であった。しかしながら「系 II-1」を容認すれば前節で導いた関係式の依拠する物理的な意味を明確にすることができる。すなわち、「SPL ノード放射の源からのノード飛来頻度 ν^0 はその源の質量 m_0 に関する情報を完全に保有し、SPL ノードの間隔が源の質量の情報を背負っているため、そのドップラー変動分 (間隔変動分) によって運動量が検出できる」ということである。この解釈に従って式 (2.50) を基礎的な関係式として (2.51) を経て (2.26)、(2.27) に代入すれば

$$\delta \mathbf{k} = \frac{2\pi}{h} \gamma m_0 \mathbf{v} (\eta^0 + 1) \quad (2.53)$$

$$\delta \nu = \nu^0 (\gamma - 1) + \frac{1}{h} \gamma m_0 c (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0) \quad (2.54)$$

が得られる。 $m = \gamma m_0$ とし、 $m\mathbf{v} = \mathbf{p}$ として、(2.53) から \mathbf{p} について解き、(2.35) の記号を用い、また (2.36) を用いて (2.54) から $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0$ について解くと

$$\mathbf{p} = \frac{h}{2\pi} \bar{\mathbf{k}} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{h}{\lambda} \quad (2.56)$$

が得られる。この関係式は決して波動と粒子の二重性を導出しているのではなく、SPL ノードの周期的な飛来頻度あるいは飛来間隔のドップラー変動と運動量との関係を示しているに過ぎないことに注意しよう。

2.7 回転放射する場における光行差の発生

素粒子のスピンは大きさを持たない粒子の自転という、矛盾した概念に依っている。従来理論では自転する粒子像が不可能であるにもかかわらず、観測事実から自転と同等な磁氣的性質と角運動量を持たねばならない。フェルミ粒子においては角運動量が $h/2\pi$ で測って半整数倍であることがさらにその描像を困難にしてきた。スピンの $1/2$ であることは、360 度で 1 回転でなく 720 度で 1 回転であるような自転を要求する。これを可能にするような空間を模索すると、必然的に 4 次元以上の複雑な空間を必要としてくる。もしも、空間 3 次元、時間 1 次元の世界で実現しようとする、メビウスの帯にみられるように、粒子そのものが空間 3 次元構造をもつことを要求され、もはや大きさを持たない点粒子においては実現不可能になる。一方、ここで取り扱う回転放射する存在確定の理論では、SP-ライン上に光行差が発生する。そうすると第 I 部 5.1 節に掲げた系 I-3 により、角運動量もまた光行差で表され、結局 SP-ライン放射の源は角運動量を持つことになる。そして極めて自然に 4 次元時空内でのスピンの存在を説明する事ができる。この節ではまず光行差の発生について述べる。

SPL ノード流れは図 2.4 に示すように SP-ラインの断続的な通過によって描像されているが、SP-ラインの伝播前線は ω_s が有限である限り、信号の伝播方向と垂直には交わず、伝播前線の外向きの法線との間にわずかな角度差を持つ。その描像を図 2.8(a) に示す。同図中、細い曲線は SP-ライン（信号伝播前線）を示し、太い矢印線 $\boldsymbol{\Omega}$ は SP-ラインの伝播方向を、 $\boldsymbol{\Omega}'$ は SP-ラインの外向きの法線方向を示す。両者の間にはわずかな角度差がある。同図 (a) においては粒子は常に観測者に対して静止しているので、前節までの記法によれば K^0 系に相当するのであるが相対速度を持つ系を対象にすることはないので上付き "0" は全て省略する。

これに対比して図 2.8(b) には、第 I 部の理論で取り扱った飛行する粒子における信号の伝播前線と光行差を示した。同図 (b) では細い曲線は第 I 部の 1 時点多方向確定による信号、つまり荷電粒子の電場の伝播前線を示す。太い矢印線 $\boldsymbol{\Omega}$ はその伝播方向を、 $\boldsymbol{\Omega}^0$ は飛行粒子から同一方向に放射をした信号の伝播前線を連ねた方向（同位相方向）を示す。両図において点線矢印は同位相方向を示している。静止した粒子（1 時点 1 方向放射）の同位相方向としては同図 (a) に示したように $\boldsymbol{\Omega}$ と一致した方向になる。両者に共通なことはつぎの 2 つの方向との間に差があるということである。

- (1) 場の伝播前線に対する法線方向と、
- (2) 源が同一方向に放射を行なった伝播信号の前線を連ねた方向（同位相方向）。

第 I 部で定義した光行差はまさに上記 (1) と (2) の差であり、これが磁場の発生の原因であり、また角運動量の原因と考えた。静止する粒子の SP-ラインにおいては (2) の規定する方向が場の伝播方向であるのに対して、第 I 部での飛行する粒子の場の伝播においては (1) に規定する方向が場の伝播方向になっ

ている。しかし両者の差だけが本質的な意味をもつとするならば同じ事象が発生するはずである。

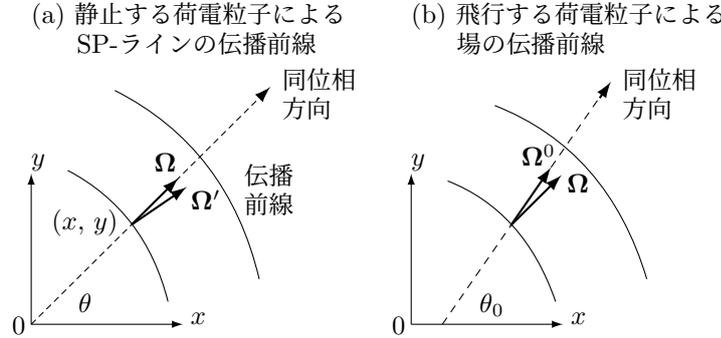


図 2.8 場の伝播前線における 2 種類の光行差.

静止する粒子の SP-ラインの光行差を求めてみよう。まずは SP-ラインの接線の方向を求め、それに直交する法線の方向を求める。SPL ノードの源は速度ゼロで、添字 0 が付かなくても静止する源に対する測定量であることに注意しよう。 Ω が $+x$ 軸となす角度を θ とする。 θ をパラメータにした SP-ラインは x, y 平面に限定されるとして、 $\{x(\theta), y(\theta)\}$ 座標で表すと (2.2) の関係から

$$x(\theta) = r \cdot \cos \theta = \frac{c}{\omega_s} \theta \cos \theta \quad (2.57)$$

$$y(\theta) = r \cdot \sin \theta = \frac{c}{\omega_s} \theta \sin \theta \quad (2.58)$$

となる。この軌跡の接線の方向を示すベクトルは

$$\mathbf{a} = \frac{dx}{d\theta} \mathbf{i} + \frac{dy}{d\theta} \mathbf{j} \quad (2.59)$$

で表わされる。ただし \mathbf{i} は $+x$ 軸方向を、 \mathbf{j} は $+y$ 軸方向を向く単位ベクトルである。 \mathbf{a} の向きを $+x$ 軸との間の角度 β で表すと

$$\tan \beta = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta + \theta \cdot \cos \theta}{\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta} \quad (2.60)$$

となる。図 2.8(a) に示した Ω' はベクトル \mathbf{a} に直交するベクトルである。このベクトルが $+x$ 軸となす角度を記号 θ' とすると $\tan \theta' = -1/\tan \beta$ が成立する。 θ に関する公式

$$\sin \theta = \tan \theta' / \sqrt{1 + \tan^2 \theta'}, \quad \cos \theta = \sin \theta' / \tan \theta'$$

において $\theta \rightarrow \theta'$ とし、 $\tan \beta$ を用いると

$$\sin \theta' = \frac{\mp 1 / (\tan \beta)}{\sqrt{1 + 1 / (\tan \beta)^2}}, \quad (2.61)$$

$$\cos \theta' = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + 1 / (\tan \beta)^2}} \quad (2.62)$$

ここで複記号の上段の記号は $(dx/d\theta \geq 0)$ の場合、下段の記号は $(dx/d\theta < 0)$ の場合である。上式中の $\tan \beta$ に (2.60) を代入すると

$$\sin \theta' = \frac{\theta \cdot \sin \theta - \cos \theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \quad (2.63)$$

$$\cos \theta' = \frac{\theta \cdot \cos \theta + \sin \theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \quad (2.64)$$

となる。 θ' と θ との差の正弦を計算すると

$$\sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} \quad (2.65)$$

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \quad (2.66)$$

ここに (2.2) から

$$\theta = \frac{\omega_s}{c} r \quad (2.67)$$

である。従って

$$\sin(\theta - \theta') = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_s/c)^2 r^2}} \quad (2.68)$$

となる。これが静止する SPL ノードの場の源の周辺に存在する光行差正弦を与える。

2.8 SPL ノードの場におけるスピン角運動量の存在

第 I 部 5.1 節の式 (5.18) では角運動量が光行差ベクトルで表されることを明らかにした。再掲すると

$$\mathbf{L} = m_0 c r_0^0 \frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0}{\Omega_t \Omega_t^0} = m_0 c r_0^0 \frac{(-\boldsymbol{\Omega}) \times -(\boldsymbol{\Omega}^0)}{\Omega_t \Omega_t^0} \quad (2.69)$$

と表される。この式右辺における $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{\Omega}^0$ は古典的な移動する源の放射する場を表したものであり、ここに取り扱う回転放射の場の方向ではない。第 I 部 (5.18) 式では $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$, $\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0$ が使われているが、ハットの付いたベクトルは向きを逆にしたベクトルであり、角運動量の本来の定義によるとハット付きのベクトル方向になるが、ベクトル積の結果ハットのない表式でも同じことになる。前節で求めた光行差における単位ベクトルは前節の考察によると図 2.8 に示されているように

$$\boldsymbol{\Omega}^0 \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}', \quad \theta_0 \rightarrow \theta, \quad \theta \rightarrow \theta', \quad r_0 \rightarrow r, \quad r \rightarrow r', \quad \Omega_t \rightarrow \Omega'_t, \quad \Omega_t^0 \rightarrow \Omega_t$$

と置き換えたものが回転放射の場の光行差になる。そこで回転放射の場に発生する角運動量は

$$\mathbf{S} = m_0 c r \frac{\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega'_t \Omega_t} \quad (2.70)$$

で与えられる。ここに

$$\boldsymbol{\Omega}' \equiv \frac{\mathbf{r}'}{r'}, \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r'} \quad (2.71)$$

であり、

$$\Omega'_t = \frac{r'}{r'}, \quad \Omega_t = \frac{r}{r'} \quad (2.72)$$

である。源における場の回転放射は反時計方向であるとする。源が座標原点 $(0, 0, 0)$ にあり、 $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{\Omega}'$ が x, y 面内にあるとすると

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \Omega_y, & \cos \theta &= \Omega_x, \\ \sin \theta' &= \Omega'_y, & \cos \theta' &= \Omega'_x, \\ \Omega'_t \Omega_t &= r/r' \end{aligned}$$

であるから角運動量は z 軸成分のみを持ち、

$$S_z = m_0 cr'(\Omega'_x \Omega_y - \Omega'_y \Omega_x) = m_0 cr' \cdot \sin(\theta - \theta') \quad (2.73)$$

となる。そこで (2.68) で与えられた光行差を代入すると

$$S_z = \frac{m_0 cr'}{\sqrt{1 + (\omega_s/c)^2 r^2}} = \frac{m_0 c^2 r' / \omega_s}{\sqrt{(c/\omega_s)^2 + r^2}} \quad (2.74)$$

$$S_x = 0, \quad (2.75)$$

$$S_y = 0 \quad (2.76)$$

となる。

ここに現れる Ω' に対応する距離ベクトル $\mathbf{r}' = r' \Omega'$ について解明しておこう。距離ベクトル \mathbf{r}' を図 2.9 に示すように距離ベクトル \mathbf{r} とこれに垂直な微小距離 \mathbf{r}_s の二つのベクトルに分ける。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s \quad (2.77)$$

そうすると \mathbf{r} と \mathbf{r}' との角度差は $\theta - \theta'$ であるから

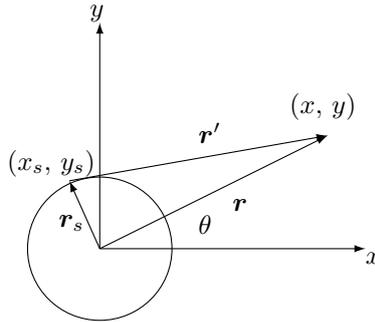


図 2.9 距離 r' の開始点 (x_s, y_s) の放射角変動に伴う移動

$$r_s = r' \sin(\theta - \theta'), \quad (2.78)$$

$$r = r' \cos(\theta - \theta') \quad (2.79)$$

となる。式 (2.65)、(2.66) を使用して上式から r' と r_s について解いて

$$r' = \sqrt{(c/\omega_s)^2 + r^2}, \quad (2.80)$$

$$r_s = c/\omega_s \quad (2.81)$$

を得る。ベクトル \mathbf{r}' の始点は定点ではなく、観測点 O の変化によって変わる。観測点を任意の方向に移動させてもベクトル \mathbf{r}' の始点は常に半径 r_s の円上のどこかにあり、終点では SP - ラインと常に直交する。

式 (2.74) において r' として (2.80) を用いれば 2.6 節の「系 II-1」によって ω_s について (2.50) が成立しているから

$$S_z(r) = \frac{m_0 c^2 r'}{\omega_s r'} = \frac{\hbar}{2} \quad (2.82)$$

となる。ここに掲げる理論によれば、SPL ノードの流れの源である素なる粒子はスピンを持ち、その値は結果として距離 r に依存せず、半整数スピンをもつフェルミ粒子と解釈することができる。

2.9 荷電粒子および中性粒子のスピン磁気モーメント

電子の磁気モーメントが古典論的な荷電粒子の回転に基づくものだとすれば角運動量と磁気モーメントの関係によって

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \boldsymbol{S}$$

となるべきであるが実際にはそうならず、 g 因子 (gyromagnetic factor)= 2 を使って

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m_e c} \boldsymbol{S} \quad (2.83)$$

と表していた。ディラックの相対論的量子力学によって理論的に $g = 2$ が導けるが、その物理的構造について具体的な描像は依然として不明なままであった。

前節までは、SPL ノード流れは質量を持つ粒子の運動力学的な物理量の担い手であるとして取り扱い、電氣的な場としては取り扱っていなかった。SPL ノード流れはその源として電氣的粒子を想定したとき、電磁場を説明できることが望ましい。我々は経験則として電氣的な粒子には陰、陽の 2 種類があることを知っているから、SP-ラインにも陰および陽の 2 種類があるとするのが妥当である。そこで次の命題を与える。

命題 II - 1 SP-ラインは電氣力を伴い、陽および陰の 2 種類がある。

SPL ノード流束を電氣的引力または斥力の発生と結び付けるためには、少なくとも 2 つの源からの SPL ノード流束が必要であって、距離 r だけ離れた 2 つの源の間に働く力は、一方の源から放射される SPL ノード流束と他方の源の間に移動を引き起こす力として定義されるのがよい。そこで SPL ノード流束の伝播する場が古典的な電氣力の場として取り扱うことができると考え、従来の電氣力学上の実験的事実に基づき次の命題を設定するのが妥当と考えられる。

命題 II - 2 SP-ラインの源が SPL ノード流束の場に置かれると、SP-ラインと同種の源の場合には斥力が働き、異種の源の場合には引力が働く。

これら 2 つの命題によって SPL ノード流束の場は電場に対応したものと見做すことができる。そこで単位面積当たりの SPL ノード流束密度及び流束ベクトルが第 I 部第 4 章 4.1 節に定義した形で成立する。ノード数が整数しかとり得ないことを除き、第 I 部 4.1 節の定義 VII~定義 IX と同じである。従来の電氣力学における電荷や電場との対応関係については別稿で取り扱うとして、ここでは SPL ノード流れが電場に対応した場でもあることを命題として掲げる。

前節で明らかにしたように、回転放射する SP-ラインの場は光行差を持ち、第 I 部 5.1 節の角運動量に関する系 I-3 に依ってスピン \boldsymbol{S} を生起する。スピンと磁気モーメントは (2.83) のように直接関係しているからスピン磁気モーメントも直接的に光行差由来であると解釈される。そこで系 I-3 に倣って次のような系を設定する。

系 I-4 スピン磁気モーメントは電場の光行差で表される。

第 I 部第 5 章で取り扱ったように角運動量の場合にはその原因となる物理量は質量と光行差であった。だから (2.70) のようにスピン角運動量は $m_0 c r \times$ 光行差となった。磁気モーメントの場合には、その存在の原因となる物理量は電荷である。そこで

$$\boldsymbol{\mu} = e r \frac{\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega'_t \Omega_t} \quad (2.84)$$

であると見做せばよい。ここで

$$r \frac{\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega'_t \Omega_t}$$

は場の源から距離 r における光行差ベクトルである。そうすると (2.70) から

$$r \frac{\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega'_t \Omega_t} = \frac{\boldsymbol{S}}{m_0 c} \quad (2.85)$$

であるから

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_0 c} \boldsymbol{S} \quad (2.86)$$

と書き表せる。このように光行差による磁気モーメントの考えを採用すれば、フェルミ粒子について $k_e = 1$ のモデルを当てはめるだけで因子 $g = 2$ が自動的に成立する。式 (2.84) の妥当性は磁気の発生が光行差によって説明でき、この式の結果が電子の実験値と合うことである。

従来理論においては電荷を持たない中性の粒子のスピンの磁気モーメントは何らかの電氣的振る舞いが無ければ説明の方法が無かった。しかしながらここに展開する理論によれば中性粒子のスピンのモデルが可能になる。中性の粒子は電氣的に正と負の 2 種 SP-ラインの源を内蔵しているものとし、この 2 種の SP-ラインが互いに 180 度の角度差をもって回転放射されるとしよう。図 2.10 にそのスピンモデルを示す。細い線

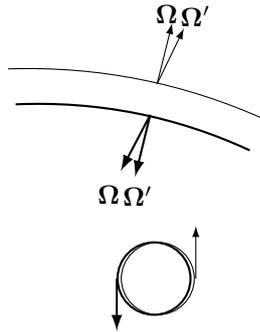


図 2.10 中性粒子のスピンモデル

の円弧は負の、太い線の円弧は正の電場をもたらす SP-ラインを表す。正負の SP-ラインの間隔はその粒子の質量によって決まり、(2.52) によるとコンプトン波長である。図 2.10 は正負の SPL ノードがこの波長間隔で交互に周辺空間を光速でスイープしている状態を示している。このような粒子と荷電粒子の相互作用を考えるとコンプトン波長より長い距離を波長とするような振動現象に対して粒子は電氣的に中性を示すと考えられる。同図下部の 2 重リングは 2 つの素過程が組になって同方向に回転放射する状態を模式的に示している。細い線の円は負の電荷に対応した SP-ライン放射の源、太い線の円は正の電荷に対応した SP-ラインの源で、何れも同方向に回転しながら放射する。場の源は点源であり、2 つの素過程が反発することなく融合して存在する状態をリングで示しているだけであって、ひも状のリングを形成するわけではない。

光行差に伴う磁気モーメントの発生に関係する $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{\Omega}'$ は負の電荷に対応した SP-ラインについては電子の場合と同じであり、正の電荷に対応した SP-ラインについては図 2.10 の点線で示したように場のベクトル方向が逆になり、 $\boldsymbol{\Omega}$ は $-\boldsymbol{\Omega}$ に、 $\boldsymbol{\Omega}'$ は $-\boldsymbol{\Omega}'$ になる。そこで光行差ベクトルは $\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\Omega} = (-\boldsymbol{\Omega}') \times (-\boldsymbol{\Omega})$ であるから磁気モーメントを光行差で説明するこの理論では、発生する磁気モーメント (2.84) は同じ方向

になり、決して打ち消し合うことはない。中性粒子場合、SP-ラインの放射源は $k_e = 2$ のタイプになるが (2.82) によればスピンは回転放射の角速度 ω_s と質量の関係によって決まり、半整数のままであり、 k_e に依存することはない。磁気モーメントもまた SP-ラインの光行差によって決まるので、(2.84) によって与えられる。反対符号の電荷によって与えられる部分は

$$\boldsymbol{\mu} = er \frac{(-\boldsymbol{\Omega}') \times (-\boldsymbol{\Omega})}{\Omega'_t \Omega_t} = er \frac{\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega'_t \Omega_t} \quad (2.87)$$

であり、この源からの SP-ラインの伝播する空間のいたるところで同じ光行差をもつことになり、どの場所でも (2.86) に従って磁気モーメントが与えられる。

ポア磁子を使った表現式における g 因子は実験値では 1.9131 であり、この理論による値は 2 であるから実験値を再現しているわけではないが、上のように考えることによって少なくとも中性粒子のスピン及び磁気モーメントの存在は説明可能である。

参考文献

- [1] C. Møller, The Theory of Relativity, Oxford University Press, London (1952), II, sec.23, eq.71(p57), sec25, eq.9(p62), sec.18, eq.25-27(p41).
- [2] 朝永振一郎、「量子力学」I みすず書房 (1960) p. 234.
- [3] 影山誠三郎、「原子核物理」、理工学基礎講座 25, 朝倉書店 (1979)
- [4] David J.Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Second Edition, International Edition, p.171, Pearson Education Ltd (2005)