量子論・古典論の統一はできるか
第 I 部　光行差とノード流れの場の理論　[付録]

松原　邦彦

2020 年 2 月 28 日

目次

付録 A

A.1　微分演算子の座標系変換

観測者に対して静止している系を K 系 (x, y, z, t) とし、これに対して速度 v を持つ系を K' 系 (x', y', z', t') とする。いま、本文ではダッシュを 0 で置き換えていることに注意。あるスカラー関数を ϕ として

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\iota}} = f_{\iota}(x, y, z, t) \tag{A.1}$$

を考える。座標のローレンツ変換

$$x^{\iota} = \frac{\partial x^{\iota}}{\partial x'^{\kappa}} x'^{\kappa} \tag{A.2}$$

を考慮すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\iota}} = \frac{\partial \phi / \partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\iota} / \partial x'^{\kappa}} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\iota}} \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\kappa}} \tag{A.3}$$

となる。したがって

$$\frac{\partial}{\partial x^{\iota}} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\iota}} \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}}, \quad (\iota, \kappa = 0, 1, 2, 3) \tag{A.4}$$

である。ここに

$$\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\iota}} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c} v_x & -\frac{\gamma}{c} v_y & -\frac{\gamma}{c} v_z \\ -\frac{\gamma}{c} v_x & 1 + \frac{v_x^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_y}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ -\frac{\gamma}{c} v_y & \frac{v_y v_x}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_y^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_y v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ -\frac{\gamma}{c} v_z & \frac{v_z v_x}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_z v_y}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_z^2}{v^2}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

であるからこれを用いて 3 次元ベクトル表示をすると

$$\frac{\partial}{c\partial t} = \gamma \Big\{ \frac{\partial}{c\partial t'} - \sum_m \frac{v_m}{c} \frac{\partial}{\partial x'_m} \Big\}, \quad (m = 1, 2, 3) \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j} + (\gamma - 1) \frac{v_j}{v^2} \sum_m v_m \frac{\partial}{\partial x'_m} - \gamma \frac{v_j}{c} \frac{\partial}{c\partial t'}, \quad (j, m = 1, 2, 3) \tag{A.7}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{c\partial t} = \frac{\gamma}{c} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t'} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}') \Big\} \tag{A.8}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}' + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}') \boldsymbol{v} - \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{v} \frac{\partial}{c\partial t'} \tag{A.9}$$

となる。

次にこの逆関係

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\iota}} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\iota}} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \tag{A.10}$$

について導こう。いま

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\iota}} = f_{\iota}(x', y', z', t') \tag{A.11}$$

とすれば、(A.2) の逆関係

$$x'^{\iota} = \frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x^{\kappa}} x^{\kappa} \tag{A.12}$$

によって

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\iota}} = \frac{\partial \phi / \partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\iota} / \partial x^{\kappa}} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\iota}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\kappa}} \tag{A.13}$$

となり、(A.10) が成立する。ここに

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\iota}} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c} v_x & \frac{\gamma}{c} v_y & \frac{\gamma}{c} v_z \\ \frac{\gamma}{c} v_x & 1 + \frac{v_x^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_y}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ \frac{\gamma}{c} v_y & \frac{v_y v_x}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_y^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_y v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ \frac{\gamma}{c} v_z & \frac{v_z v_x}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_z v_y}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_z^2}{v^2}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

であるから、これを用いて３次元ベクトルで表示すると

$$\frac{\partial}{c \partial t'} = \gamma \Big\{ \frac{\partial}{c \partial t} + \sum_m \frac{v_m}{c} \frac{\partial}{\partial x_m} \Big\}, \quad (m = 1, 2, 3) \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \frac{v_j}{v^2} \sum_m v_m \frac{\partial}{\partial x_m} + \gamma \frac{v_j}{c} \frac{\partial}{c \partial t}, \quad (j, m = 1, 2, 3) \tag{A.16}$$

または

$$\frac{\partial}{c \partial t'} = \frac{\gamma}{c} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \Big\} \tag{A.17}$$

$$\boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\nabla} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v} + \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{v} \frac{\partial}{c \partial t} \tag{A.18}$$

となる。ここで

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\iota}} \frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\kappa}_{\lambda} \tag{A.19}$$

が成立する。$\delta_{\kappa\lambda}$ はクロネッカー記号である。この関係は (A.5) および (A.14) の各要素を用いて計算すれば証明される。例えば $\kappa = 0, \lambda = 0$ の場合

$$\frac{\partial x_0}{\partial x'^{\iota}} \frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x_0} = \gamma^2 \Big\{ 1 - \Big(\frac{v_x}{c}\Big)^2 - \Big(\frac{v_y}{c}\Big)^2 - \Big(\frac{v_z}{c}\Big)^2 \Big\} = 1$$

$\kappa = 0, \lambda = 1$ の場合

$$\frac{\partial x_0}{\partial x'^{\iota}} \frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x_1} = \gamma \frac{v_x}{c} (-\gamma + 1) + \gamma \frac{v_x}{c v^2} (\gamma - 1)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 0$$

$\kappa = 1, \lambda = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x'^{\iota}} \frac{\partial x'^{\iota}}{\partial x_1} &= -(\gamma \frac{v_x}{c})^2 + 1 + 2 \frac{v_x^2}{v^2} (\gamma - 1) + \frac{v_x^2}{v^4} (\gamma - 1)^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &= 1 + \frac{v_x^2}{v^2} (\gamma^2 - 1) - \frac{v_x^2}{c^2} \gamma^2 = 1 + \frac{v_x^2}{v^2} \gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) - \frac{v_x^2}{v^2} = 1 \end{aligned}$$

その他の項については上記の計算の類推から明らかであるから省略する。

A.2 ガウスの定理によるいくつかの場の発散項の計算

A.2.1 第 3 章 3.3 節における $\boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\Omega_t\gamma\boldsymbol{v}/c$ の計算

3 次元におけるガウスの定理およびそれから導かれる法則は本来遅延信号伝達の概念を持っていない。ガウスがこの定理を定式化した時代には遠隔作用論が認められている時代であって、時間をかけて作用が伝達する考えを持ち込む余地がなかった。ここで主張している存在確定の考え方から言えば、移動する点電荷に対して 3 次元のガウスの定理を当てはめるには無理がある。ただ静的な電場を対象にする限り、伝搬にかかった時間の前後で状態は変わらないから、瞬時に信号伝達が行われたとの前提に立っても状態記述には影響がない。また動的な系に対しても、信号伝達距離が同じ球面に対してとる積分では、同時性が半径 r の全球面で確保されるから意味ある計算ができる。しかしこの場合、その源から発する物理量は $\Delta t = r/c$ 秒前の値になる。

本文の式 (3.29) 右辺の最後の項のうち、$\boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\Omega_t\gamma\boldsymbol{v}/c$ の部分はゼロである。以下にその計算を示す。この式を一定速度で飛行する点電荷についてガウスの発散定理に当てはめるため、K 系において半径 r の球面について積分を行うことを前提に、(2.58) および (3.1) の記法を使って書き換えを行う。$\Omega_t^0 = |\boldsymbol{\Omega}^0|$, $\Omega_t = |\boldsymbol{\Omega}|$ の関係より $r^0 = r\Omega_t^0/\Omega_t$ であるから、誘電率 $\epsilon = 1$ として

$$D\Omega_t\Omega_t\gamma = \frac{\Omega_t\gamma^2 e}{\Omega_t^0(r^0)^2} = \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_t^0}\right)^3\gamma^2\frac{e}{r^2} \tag{A.20}$$

S を K 系で想定された半径 r の球の表面積とし、$d\boldsymbol{S}$ をその微小面積要素ベクトルとすると

$$\oint_S D\Omega_t\Omega_t\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot d\boldsymbol{S} = \gamma^2\frac{e}{c}\left(\frac{\Omega_t}{\Omega_t^0}\right)^3\oint_S\frac{\boldsymbol{v}}{r^2}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.21}$$

Ω_t および Ω_t^0 は、その定義により時間に関するパラメータであるので、積分記号の外に出る。ここで動径を r とし、第 1 の角度 θ を x 軸に対する動径のなす角度とし、第 2 の角度を ϕ とする球面座標を用いる。通常は z 軸に対する動径の角度を θ と採ることが多いが、ここではそれと異なって、x 軸を回転軸とする回転体を考える。横倒しにした地球を考えると、θ は緯度、ϕ は経度に相当する角度である。従って

$$dS = r^2\sin\theta d\theta d\phi \tag{A.22}$$

さらに $+x$ 軸方向が $\boldsymbol{v}$ の方向と一致するように座標系を選ぶ。そうすると $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ となり、$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = v\cos\theta dS$ となるから求める球面積分は

$$\oint_S\frac{\boldsymbol{v}}{r^2}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^\pi v\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = v\pi\Big[\sin^2\theta\Big]_0^\pi = 0 \tag{A.23}$$

となって本文 (3.30) 式右辺はゼロである。従ってガウスの定理により $\boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\Omega_t\gamma\boldsymbol{v}/c = 0$ となる。単独の荷電粒子 e を荷電粒子の集まりである ρ に変えてもこの関係は変わらない。

A.2.2 第 3 章 3.5 節における $\boldsymbol{\nabla}\cdot D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}$ の計算

本文中の式 (3.19) を使うので、先ず $D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$ の K^0 系における発散を求めておく必要がある。$D' = D(\Omega_t - \eta)$ と本文の (3.1) から

$$D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{\gamma D_0\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0}{\Omega_t^0\Omega_t}(\Omega_t - \eta) \tag{A.24}$$

と書くことができるが、これは K 系に観測者を置く場合の表現である。観測者の座標系を荷電粒子を静止するようにみる K^0 系に移動すると、本文第 I 部 2.4 節で指摘したように、その系における時空間の測定値を基準にとることになり、$\boldsymbol{\Omega}^0$, Ω_t^0 は本文 (2.38), (2.39) を用いることになる。つまり $\boldsymbol{\Omega}^0 = \boldsymbol{r}^0/r^0$, $\Omega_t^0 = \Delta t/\Delta t^0 = 1$ である。(A.24) の γ は 2.5 節の基本表式 (2.58) に立ち戻って考えれば、飛行する荷電粒子に対する相対速度なので、K^0 系では当然 1 と置かれる。また (2.58) を引用すると $\Omega_t - \eta \to \Omega_t^0 + \eta^0$ と置き換えられ、結局 K 系での $D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$ は K^0 系に移れば、CGS 静電単位系として

$$D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 \to \frac{e\boldsymbol{r}^0}{(r^0)^3}(1+\eta^0) \tag{A.25}$$

なのである。

η^0 は K 系で捉えた場の構造を反映しており、その中の速度 v は K^0 系から見た K 系の相対速度を表している。結果的にはこの項は消えるのであるが、ここではきちんと書き下しておく。表記を簡単にするために、$(c/v^2)(1-1/\gamma) = a$ とおいて $\eta^0 = a(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Omega}^0)$ と書こう。ここで x^0 軸方向が $\boldsymbol{v}$ の方向と一致するように座標系を選ぶと $\boldsymbol{v} = (v,0,0)$ となり、したがって $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Omega}^0 = vx^0/r^0$ となる。ここで 3.3 節で取り扱ったと同様に、動径を r^0 とし、第 1 の角度 θ_0 を x^0 軸に対する動径のなす角度とし、第 2 の角度を ϕ_0 とする球面座標を用いる。そうすると $x^0/r^0 = \Omega_t^0\cos\theta_0$ となり、従って $\eta^0 = av\Omega_t^0\cos\theta_0$ となる。これによって

$$D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = e\Big\{\frac{\boldsymbol{r}^0}{(r^0)^3} + av\frac{\boldsymbol{r}^0}{(r^0)^3}\cos\theta_0\Big\} \tag{A.26}$$

この式をガウスの発散定理に当てはめるため、K^0 系において半径 r^0 の球面積分を行う。

$$\oint_{S'} D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0\cdot d\boldsymbol{S}' = e\Big\{\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{r}^0\cdot d\boldsymbol{S}'}{(r^0)^3} + av\oint_{S'}\cos\theta_0\frac{\boldsymbol{r}^0\cdot d\boldsymbol{S}'}{(r^0)^3}\Big\} \tag{A.27}$$

ここに S' は、飛行荷電粒子を静止するようにみる系で想定された球の表面積であり、$d\boldsymbol{S}'$ は微小面積要素ベクトルである。$\boldsymbol{r}^0$ の方向と $d\boldsymbol{S}'$ の方向は一致しているため、それらの内積は単に各ベクトルの大きさの掛け算となる。球を x_0 軸を回転軸とする回転体とみなした時、θ_0 は緯度に、ϕ_0 は経度に対応する角度として

$$dS' = (r^0)^2\sin\theta_0 d\theta_0 d\phi_0 \tag{A.28}$$

と表される。(A.26) の右辺 $\{\}$ 内の第 1 項は本文の (3.15) に示したように 4π であるが、第 2 項の面積分は dS' を (A.28) で置き換えて計算すると

$$av\int_0^{\pi}\sin\theta_0\cos\theta_0 d\theta_0\int_0^{2\pi}d\phi^0 = av\pi\Big[\sin^2\theta_0\Big]_0^{\pi} = 0 \tag{A.29}$$

となって、結局

$$\oint_{S'} D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0\cdot d\boldsymbol{S}' = e\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{r}^0}{(r^0)^3}\cdot d\boldsymbol{S}' = 4\pi e \tag{A.30}$$

となる。

単独の荷電粒子ではなく、多数の粒子が荷電密度 ρ_0 で集まっていると

$$\oint_{S'}(D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0)_n dS' = \int_{V'}\boldsymbol{\nabla}^0\cdot D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 dV' = 4\pi\int_{V'}\rho_0 dV' \tag{A.31}$$

が成立し、結果として

$$\boldsymbol{\nabla}^0\cdot D'\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = 4\pi\rho_0 \tag{A.32}$$

が成立する。ここで座標の採り方は計算がし易いように、空間の +x 軸方向が速度 v 方向と一致するように選んでいるが、半径 r の球面全体の面積分をとるので、 x 軸方向をどのように採ろうとも結果は同じである。すると本文（3.18) から (3.25) までの式について D を D' に置き換えてもそのまま成立する。いま K^0 系においては静止する電荷だけを考えているから、場もすべて定常状態でなければならない。したがって

$$\frac{\partial D' \Omega_t \Omega_t^0}{c \partial t_0} = 0 \tag{A.33}$$

そうすると本文 (3.27) の代わりに

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot D' \Omega_t \boldsymbol{\Omega} + \frac{\partial D' \Omega_t \Omega_t}{c \partial t} = 4\pi \rho_0 \tag{A.34}$$

が成立する。観測者を K 系に置く限り、$\Omega_t = 1$ であるから

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot D' \boldsymbol{\Omega} + \frac{\partial D' \Omega_t}{c \partial t} = 4\pi \rho_0$$

となる。