量子論・古典論の統一はできるか
第I部　光行差とノード流れの場の理論　[第５章]

松原　邦彦

2021 年 4 月 28 日

目 次

第5章　光行差と角運動量

5.1　光行差によって角運動量を表現する

これまで磁場が光行差によって発生するとみなしてきたが、磁場は角運動量と密接に関連しているから、角運動量もまた光行差と関連していると考えることには磁場の場合と同様の根拠がある。図 5.1 に示すような飛行粒子を考えよう。2.1 節で飛行荷電粒子を考えたが、ここでも同様に座標の原点を飛行している静止質量 m_0 の粒子を考える。ただし電荷の有無は問わない。角運動量は必ずある定点、ここでは K 系上の観測点 O(x, y, z) を参照して定義される。粒子の運動量、角運動量の表現に現れるベクトルは図 2.1 あるいは図 2.5 に表すベクトルの方向と図 5.1 で表示するベクトルの方向は逆になる。光行差のベクトル定義は電磁法則を説明するために用いており、それに合わせているからである。粒子の運動量、角運動量の表現に現れるベクトル $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$, $\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0$ は電磁気の法則に現れる $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}^0$ に対しても方向が逆になることに注意しよう。光行差の定義に用いたベクトル $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}^0$ との間には次の関係にある。

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = -\boldsymbol{\Omega} \tag{5.1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0 = -\boldsymbol{\Omega}^0 \tag{5.2}$$

$$\hat{\eta} = -\eta \tag{5.3}$$

$$\hat{\eta}^0 = -\eta^0 \tag{5.4}$$

2.3 節の (2.45), (2.46) にマイナス (-) を掛けて上の記号を用いるとこれらの変換式は

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0 = -\{\boldsymbol{\Omega} + (\eta - \Omega_t)\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} + (\hat{\eta} + \Omega_t)\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}, \tag{5.5}$$

$$\hat{\Omega}_t^0 = \gamma\{\Omega_t + \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\Omega}})}{c}\} = \Omega_t^0 \tag{5.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = -\{\boldsymbol{\Omega}^0 + (\eta^0 + \Omega_t^0)\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0 + (\hat{\eta}^0 - \Omega_t^0)\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}, \tag{5.7}$$

$$\hat{\Omega}_t = \gamma\{\Omega_t^0 - \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0)}{c}\} = \Omega_t \tag{5.8}$$

となる。

古典力学での角運動量の定義によれば

$$l_x = \Delta y p_z - \Delta z p_y \tag{5.9}$$

$$l_y = \Delta z p_x - \Delta x p_z \tag{5.10}$$

$$l_z = \Delta x p_y - \Delta y p_x \tag{5.11}$$

である。ここに Δx, Δy, Δz は飛行粒子の座標であり、観測点 O から飛行粒子の位置までの距離の x, y, z 成分を示す。p_x, p_y, p_z は飛行粒子の運動量の x, y, z 成分である。

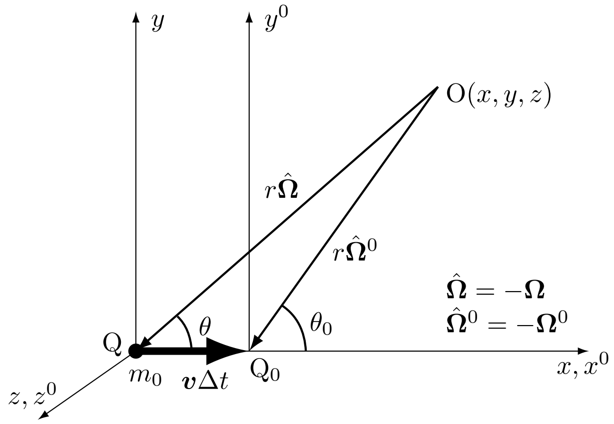

図 5.1: 飛行粒子の角運動量

図 5.1 に示すように粒子は $x - y$ 平面内を $+x$ 方向に速度 v で飛行しているとすれば観測者 O からみて Q 点までの距離ベクトルは $r\hat{\mathbf{\Omega}}(= -\boldsymbol{r})$ であり、Q_0 点までの距離は $r\hat{\mathbf{\Omega}}^0(= -\boldsymbol{r}^0)$ である。光行差の座標の採り方とは距離 r のベクトルの方向が逆であるから $\Delta x = -x$, $\Delta y = -y$, $\Delta z = 0$ である。粒子の運動量の各成分は $p_x = m_0 v$, $p_y = 0$, $p_z = 0$ であり、角運動量は

$$l_x = 0, \quad l_y = 0, \quad l_z = m_0 v y$$

である。ここで、$y = r\sin\theta = r^0 \sin\theta_0$ であるから

$$l_z = m_0 v r^0 \sin\theta_0 \tag{5.12}$$

となる。時刻 $t = 0$ に飛行粒子からその存在を示す信号 (1.4 節に述べた存在確定の信号) が発せられたとし、観測者のいる点 O にその信号が届いた時刻を $\Delta t = r/c$ として、その間に粒子は $v\Delta t = vr/c$ だけ進む。観測者 O からみた光行差正弦は 2.1 節の (2.2) によって表されるから、$v\sin\theta_0 = c\sin(\theta_0 - \theta)$ の関係がある。したがって

$$l_z = m_0 c r^0 \sin(\theta_0 - \theta) \tag{5.13}$$

となる。ここに θ_0 は飛行粒子の座標 K^0 系からみた角度で、$r^0 = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + (z^0)^2}$ である。この表式によると飛行粒子の速度に関する情報を光行差が担う。ここで存在確定の考え方に従えば、角運動量なる物理量が相互作用の上で意味ある働きをするためには、質量の存在を示す確定信号が観測点に到達しなければならない。式 (5.13) においてはその確定信号の光行差が角運動量に関係すると解釈される。これを次のような系として設定する。

系 I − 3 角運動量は光行差で表わされる。

式 (5.13) を導くのに用いた光行差は非相対論的な取扱いの場合である。相対論的取扱いでは光行差が (2.17) で表わされるから、この場合の角運動量を L_z で表すと

$$L_z = m_0 c r^0 \sin(\theta_0 - \theta) = m_0 c r^0 (\gamma - 1)\cos\theta \sin\theta_0 + m_0 \gamma v r^0 \sin\theta_0 \tag{5.14}$$

となる。ここで

$$l_z^* = m_0 c r^0 (\gamma - 1) \cos\theta \sin\theta_0 \tag{5.15}$$

とすれば、(5.14) は

$$L_z = l_z^* + \gamma l_z \tag{5.16}$$

と書ける。L_z は (5.12) の l_z と比較して l_z^* が付加することと、γ が掛けられる点が異なり、ニュートン力学における角運動量の定義の拡張になっている。

$sin(\theta_0 - \theta)$ に光行差ベクトルを使った表現式 (2.49) を用いてみよう。ところで図 5.1 で表示しているベクトル $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}^0$ や $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}^0$ は 2.1 節で定義した光行差のベクトルと方向が反対になっている。$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0$ は $(-\boldsymbol{\Omega}) \times (-\boldsymbol{\Omega}^0)$ と書かなければならない。そこで (5.1), (5.2) を使うと (5.14) は

$$L_z = m_0 c r^0 \frac{(\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0)_z}{\Omega_t \Omega_t^0} \tag{5.17}$$

となる。式 (5.17) に要素 $(\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0)_x$, $(\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0)_y$ を加えて、運動粒子に対して一般的な座標の採り方をすれば各要素は零でない値を持ち

$$\boldsymbol{L} = m_0 c r^0 \frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0}{\Omega_t \Omega_t^0} = m_0 c \frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}{\Omega_t} \times r^0 \frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0}{\Omega_t^0} \tag{5.18}$$

となる。2.3 節の式 (2.24) によれば $\Omega_t = r/r = 1$ である。従って (5.1) を加味すれば

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}{\Omega_t} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{5.19}$$

であり、(2.36), (2.37) に (5.2) を加味して

$$r^0 \frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0}{\Omega_t^0} = -\boldsymbol{r}^0 \tag{5.20}$$

である。そこで

$$\boldsymbol{P} = m_0 c \frac{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}{\Omega_t} = m_0 c \hat{\boldsymbol{\Omega}} \tag{5.21}$$

という記号を用いると

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P} \times r \hat{\boldsymbol{\Omega}}^0 \tag{5.22}$$

と書ける。$\boldsymbol{P}$ を拡張された運動量とみなすことによって角運動量の相対論的な表現をつじつまのあったものにすることができる。このことは次節に詳細に取扱う。拡張された角運動量は (5.16) に倣って

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{l}^* + \gamma \boldsymbol{l} \tag{5.23}$$

と表す。$\boldsymbol{l}^*$ は観測点から飛行粒子までの距離 r の飛行方向成分のローレンツ伸縮に依存する量である。従って $\gamma \simeq 1$ の場合にはゼロになり、速度が小さいときは無視できる量である。このような量が加わってくる理由は、光行差の理論によれば、運動量でさえも場の量で表され、一貫して場の源と観測者との相対的関係に依存するからである。

5.2　一般化４元運動量・エネルギーベクトル

前節では系Ｉ－３に基づき $\boldsymbol{P}$ という拡張された運動量を便宜的に用いた。相対性理論に基づくと、移動する系の場はローレンツ変換する 4 元ベクトルを構成しているので、この拡張された運動量に関して一貫した４元形式で関係式が成立するはずである。そこで次のような４元ベクトルを定義する。

定義 X [一般化４元運動量・エネルギーベクトル (generalized four-dimensional momentum energy vector, GFMV)]：飛行する質量 m_0 の質点から放射される確定信号が伝播する方向 $\boldsymbol{\Omega}^0$（2.2 節の定義 II[光行差] の (1) に規定する方向）をとり、その向きを 180 度回転したベクトル $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ を 4 次元に拡張して $\hat{\Omega}^\mu$ とするとき

$$P^\mu = m_0 c\hat{\Omega}^\mu,\ \ (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{5.24}$$

を一般化４元運動量・エネルギーベクトルと名づける。

このように定義した「一般化 4 元運動量・エネルギーベクトル」は通常の 4 元運動量・エネルギーベクトルを含んでいるが、いくつかの相違点がある。2.3 節 (2.25) に示したように $\hat{\Omega}^\mu\hat{\Omega}_\mu = 0$ が成立しているため

$$P^\mu P_\mu = 0 \tag{5.25}$$

が成立する。

空間的要素を構成する 3 次元ベクトル部分及び時間的要素 P_t は次のように変換する。

$$\boldsymbol{P} = m_0 c\big\{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0 + (\hat{\eta}^0 - \Omega_t^0)\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\big\} \tag{5.26}$$

$$P_t = m_0 c\gamma\big\{\Omega_t^0 + \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\Omega}}^0)}{c}\big\} \tag{5.27}$$

これらの表現式の $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ と $\hat{\Omega}_t$ を粒子と共に移動する系での観測値とその値からの変動分に分けて

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^0 + \delta\boldsymbol{P} \tag{5.28}$$

$$P_t = P_t^0 + \delta P_t \tag{5.29}$$

とすると

$$\delta\boldsymbol{P} = m_0 c(\hat{\eta}^0 - \Omega_t^0)\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c} \tag{5.30}$$

$$\delta P_t = m_0 c(\gamma - 1)\Omega_t^0 + m_0 c\gamma\frac{\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\Omega}}}{c} \tag{5.31}$$

である。ここで

$$\boldsymbol{p} = \gamma m_0\boldsymbol{v} \tag{5.32}$$

とすれば、これは明らかに従来理論の運動量そのものであり、また

$$\gamma m_0 c^2 = E, \tag{5.33}$$

$$m_0 c^2 = E_0 \tag{5.34}$$

とおくと、これらは飛行する粒子の質量 γm_0 と静止する粒子の質量 m_0 のエネルギー換算を表し、

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2(\gamma - 1) \tag{5.35}$$

と置けばこれは運動エネルギーである。さらに

$$\hat{E} = c(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}) \tag{5.36}$$

と置こう。$\hat{E}$ はニュートン力学では通常現れることのない量で、運動量 $\boldsymbol{p}$ の $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ 方向への投影を反映する。

(5.27) の $P_t (= m_0 c^2 \hat{\Omega}_t / c)$ は質量エネルギーを光速 c で割ったものに等しいから δP_t も同じように考えて

$$\delta P_t = \frac{\delta E}{c} \tag{5.37}$$

と置くと

$$\delta \boldsymbol{P} = (\hat{\eta}^0 - \Omega_t^0)\boldsymbol{p} \tag{5.38}$$

$$\delta E = E_k \Omega_t^0 + \hat{E} \tag{5.39}$$

となる。

ニュートン力学的な運動エネルギーはこの中に近似値として含まれており

$$E_k = m_0 c^2(\gamma - 1) \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{5.40}$$

である。また相対速度が小さい時、$\hat{\eta}^0 = 0$ であるから

$$\delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} \Omega_t^0 \tag{5.41}$$

$$\delta E = E_k \Omega_t^0 + \hat{E} \tag{5.42}$$

となる。

従来理論の 4 元運動量・エネルギーベクトル $\boldsymbol{p}$, E はここに定義した一般化運動量・エネルギーベクトルに包含される。式 (5.28), (5.29) 右辺第 1 項の $\boldsymbol{P}^0$, P_t^0 は質点が速度を持たないときも値を持ち、質量エネルギーを c で割った値に等しい大きさを持つ。相対速度がゼロであっても値を持つので、”潜在的運動量” と呼ぶのがふさわしい。