

量子論・古典論の統一はできるか
第I部 光行差とノード流れの場の理論 [第4章]

松原 邦彦

2020年2月28日

目次

第 4 章	ノード流れの場の方程式	46
4.1	分節線、ノード数、ノード数密度およびノード流束の定義	46
4.2	ノード流れの平衡式	49
4.3	ノード流れの場から電磁方程式を導く	52
4.4	新理論におけるベクトルポテンシャル表示	53
4.5	電磁場における安定な渦の存在の可能性	55

第4章 ノード流れの場の方程式

これまでに展開してきた理論によれば、磁場 \mathbf{H} および誘導電場 $\delta\mathbf{E}$ は飛行粒子の生成する電場の伝搬における光行差によって誘導されるとみなされる。第3章 3.6節で得た場の方程式 (3.63) は光行差の4次元の拡張により表現した磁場および誘導電場を表す。ここで $\partial x^{0,\mu}/\partial x^\lambda$ を (3.20) で表される定数であるとして

$$\Omega^{0,\mu} = \frac{\partial x^{0,\mu}}{\partial x^\lambda} \Omega^\lambda, \quad (4.1)$$

$$\tilde{S}^\mu = \frac{\partial x^{0,\mu}}{\partial x^\lambda} S^\lambda \quad (4.2)$$

とし、これを (3.62) の両辺に適用すれば

$$\frac{\partial x^{0,\mu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial D\Omega^\lambda \Omega^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{0,\mu}}{\partial x^\lambda} S^\lambda \quad (4.3)$$

となり、これより次式を得る。

$$\frac{\partial D\Omega^\mu \Omega^\nu}{\partial x^\nu} = S^\mu \quad (4.4)$$

従ってローレンツ変換を施す前の、より基本的な法則は (4.4) であると言える。この式は対称テンソルの性質をもつ。理論形式の美しさから言えば、電磁場を対称テンソルで記述する方が望ましい。しかしそのような表現形式が存在するであろうか？ この章ではこの問題を追求し、電磁ベクトルポテンシャル表示ばかりでなく、電磁場そのものを対称テンソルで記述する理論が可能であることを明らかにする。

4.1 分節線、ノード数、ノード数密度およびノード流束の定義

古典的な電磁気学では電気力線は電気の源から観測点まで節目をもたない連続した一本の線を引き、これらが多数集まってできる線束の密度をもって電場の強さとしている。歴史的にみて、電気力学の確立の当時、遠隔作用論のニュートン力学の影響を受けて組み立てられている。この力線はファラデーによって考えられ、マクスウェルによって数学的な表現形式に仕立て上げられた。マクスウェルの電磁方程式の組立てによって近接作用的な事象として解釈されるに至ったが、その理論的組立には多分に非局所的、遠隔作用論的な道具が使われている。電気力線は一つの源から出て他の反対符号の源で終わるかまたは無限遠で終わり、途中で途切れることはないとして定義されている。つまり非局所場的なイメージで表現されているのである。このような力線は動的に空間を遅延伝播する $D\Omega^{0,\mu}\Omega^\nu$ のような4元的な場をイメージするには必ずしも適当ではない。高速に変動する場の記述には、途中で任意に途切れる事が許される力線が必要になる。そのため電磁気の方程式は電気力線によってではなく、電場ベクトル \mathbf{E} やその他の時間変化するベクトルによって記述される。電気力線は静的な場の表現にしか向いていない。そこで電磁場について遅延的で局所場的なイメージに基づく場の表現が可能であろうとの立場から、電気力線の代わりに時間的区切り線のついたノードのイ

メージで再定義を試みる。以下に「信号の伝達」という言葉が現れるが、これは序章で述べた存在確定の考え方に沿った局所的な力場、ここでは電場の伝達信号のことである。

定義 V [分節線]: 信号の伝達方向に沿って一本の線を引き、これに区分線 (sectioned line) を入れる。区分線で区切った線を分節線と呼ぶ。

この定義の特徴は、その源が自己を中心として周囲にその存在を確定する過程として場が発生することであり、すでに序論で述べたように、自然界の基本的要素が自己中心的存在物であるとする”存在確定”の見方から導入されてくる。分節線は源の消滅によって途中で無くなることも許され、源から流出する線の束は動的に変化できる。場を伝える信号は光速 c で伝播するから、常に源から流れ出る動的な分節線で表現するほうが近接作用論的に妥当である。

定義 VI [ノードおよびノード数]: 区分線の間隔を Λ としたとき、分割された 1 分節をノード (node) と名づけ、1 分節間をノード 1 個と数える。確定信号が途切れたとき、間隔 Λ より短い分節線端が形成される場合は、その長さを dL としてノード数 dL/Λ 個と数える。

この定義によって分節線は何等粒子化されるものではない。従来の古典的物理学における連続性を保持する限り、どのような半端なノード数も取り得る。ただし第 II 部で取り扱うように一つの素粒子モデルによって半端なノードをとり得ない場合もあり、その場合にはノード数が整数となる。しかし上の定義の時点ではそのような制約はつけない。長さ L の分節線は L/Λ 個のノードから成る。1 本の分節線は単位長さ当たり (単位長さ)/ Λ 個のノードを持ち、1 本の分節線当たり 1 秒間に c/Λ [nodes/sec] のノードが放射される。分節の間隔 Λ をどのような値に取るかについてもこの定義の時点では任意である。採用している単位系で 1[unit_length] ととってもよく、その場合には、源から流れ出る分節線の数が採用している単位系に支配されるか、または独自の単位系を構成することになる。例えば、もし $\Lambda = 1[\text{cm}]$ にとると、1 本の分節線は長さ 1m 当たり 1 個のノードを持ち、1 本の分節線につき 1 秒間につき $2.99792458 \times 10^{10}$ 個のノードが通過する、ということになる。もし $\Lambda = 2.99792458 \times 10^{10} \text{cm}$ (光速の値にセンチメートルを付けたもの) を採用するならば 1 本の分節線につき 1 秒間に 1 個のノードが通過する、という具合である。

この信号の源から半径 r の点で時刻 t に到達した分節線は次々と場所を変えて前方に進行する。分節された線の模式図を図 4.1 に示す。場の源は分節線を定常的に放射する。この様子を示したのが図 4.2 である。分節線を用いて対象とする物理的相互作用の強さを表すために、その原因となっている源の強さを次のように定義しよう。

定義 VII [場の源の強さ]: 流れ出る分節線の源の強さは単位時間に発生する分節線のノード個数 [nodes/unit_time] によって

$$\hat{q} = N_e \frac{c}{\Lambda} \quad [\text{nodes/unit_time}] \quad (4.5)$$

と表す。ここに N_e はその源から流れ出る分節線の数である。

この定義の時点では 1esu 当たりの電荷の分節線の数 N_e を決定する理論は提起していない。この点では従来理論の電気力線と同じであり、分析の状態に都合の良い本数を任意に設定することができる。従来の電磁気学で電気力線が定量的に取り扱われなかった理由の一つにも同様のことがあり、これを決めるためには特別の理論が必要である。第 II 部でこれらノード数を固有の値に設定する特別の理論を持つのであるが、それまでは従来理論と同様にその概念だけを定性的に利用することになる。

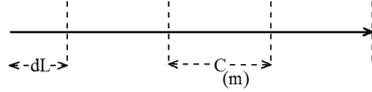


図 4.1: 存在確定信号伝達の分節線とノード

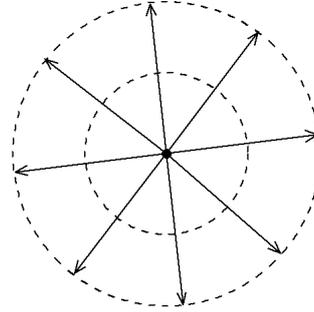


図 4.2: 分節線の源

この定義による場の源の強さと従来理論の場の源の強さ（電荷）との関係を明らかにしておこう。従来理論と関連付けるには単位系に関係した、ある係数が必要になる。例として電荷に CGS 静電単位を採用した場合を考える。1[esu] を N_0 本の分節線で表すとすれば単位時間あたりに発生するノード数は $N_0 c / \Lambda$ [nodes/sec] と書ける。そうすると単位時間あたりに発生するノード数から esu に変換する変換係数は $N_0 c / \Lambda$ [nodes/sec] 分の 1、つまり

$$\alpha = \frac{\Lambda}{N_0 c} \text{ [esu} \cdot \text{sec/node]} \quad (4.6)$$

である。そうすると従来の理論における場の源の強さを CGS 静電単位で表して q としたとき、

$$q = \alpha \hat{q} = \frac{N_e}{N_0} \text{ [esu]} \quad (4.7)$$

と表せる。実際にこの表現形式を使用する段になると今度は N_0 をどう設定するかという問題が起こる。そこで電子の電荷についての測定値から α の値を決めることを考えよう。電子 1 個の [esu] で測った電荷を e とし、同じ電子 1 個が 1 秒間に放射するノード数を (4.5) とすると、1node/sec 当たりの esu、つまり α は

$$\alpha = e \frac{\Lambda}{N_e c} \text{ [esu sec/node]} \quad (4.6a)$$

である。ここに実験値より

$$e = 4.803204673 \times 10^{-10} \text{ [esu]}$$

である。(4.6) 式と比較すると $1[\text{esu}]/N_0 = e[\text{esu}]/N_e$ ないしは $N_0 = N_e \times 1[\text{esu}]/e[\text{esu}]$ と置いたことになる。古典論における電子 1 個の電場の源の強さは (4.7) 式により、当然のことながら $q = \alpha \hat{q} = e$ となって α の表現が適切であることが確かめられる。

そうすると発生する場の空間的連続性（場の無限分割性）を保持しようとする限り N_e/N_0 は整数ではありえない。これは従来の電磁気理論で行われている電束の取り扱いと同等である（従来理論では電束 Ψ を電荷 q に等しいと置く）。ただこの理論が違うのは電束の代わりに分節線を使用している点である。分節線は途中で区切ることができ、場の強さを時間変化するノード数の密度で表現することができる。このようなノードは光速で流れており、その方向は確定信号の伝播の方向である。したがってその流れはベクトルとして表される。

定義 VIII [ノード数流束密度/ノード流束ベクトル]：単位面積を単位時間に通過するノード数をノード数流束密度（または単にノード流束の大きさ） \hat{D} [nodes/unit_area/unit_time] によって表す。ノード数流束密度の大きさを持ち、流れの方向をもつベクトルをノード流束ベクトルと定義する。

定義 IX [ノード数体積密度]：単位体積当りのノード数をノード数体積密度（または単にノード密度） \hat{N} [nodes/unit_volume] と定義する。

ノードが速度 c [unit_length/unit_time] で流れているとき、ノード数体積密度 \hat{N} とノード数流束の大きさ \hat{D} の間には次の関係が成り立つ。

$$\hat{N} = \hat{D}/c \quad \text{[nodes/unit_volume]} \quad (4.8)$$

Ω を流れの方向を示す単位ベクトルとすれば、次の関係も成り立つ。

$$\hat{N}\Omega = \hat{D}\Omega/c \quad (4.9)$$

記号 \hat{D} は第 2 章で用いた D と計測の単位が異なるのでハットを付けて区別する。

CGS 静電単位系で表したノード流速密度とノード体積密度をハットを付けない記号 D および N で表記して、それらの変換式を考えよう。場の源 \hat{q} から距離 r だけ離れた点のノード流速密度は

$$\hat{D} = \frac{\hat{q}}{4\pi r^2}$$

であるから、この式の両辺に α を掛けると

$$\alpha\hat{D} = \frac{\alpha\hat{q}}{4\pi r^2} = \frac{q}{4\pi r^2} = D$$

となる。ここに $\epsilon_0 = 1$ としているから、 $\alpha\hat{D}$ は従来理論の電束 D に等しくなる。数値的には D と \hat{D} は計数の単位系に依存する係数 α 分だけ異なると考えればよい。 \hat{N} に関しても (4.8) の両辺に α をかけて、以後の節では

$$D = \alpha\hat{D} \quad (4.10)$$

$$N = \alpha\hat{N} \quad (4.11)$$

とし、[esu] で計測する限りこれまでの章で用いてきた D と同等である。単位はそのようであっても以後に表記する場の構成としては分節線ノードの流れになっている。

4.2 ノード流れの平衡式

小さな時空間の領域を考え、その中のノード流束の発生の源と境界からの流入流出の平衡式を求めてみよう。図 4.3 に示すように (x, y, z) 座標系において、微小な直方体の体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ と微小な時間間隔 Δt を考える。まず微小面積 $\sigma_x = \Delta y \Delta z$ におけるノード流束の x 方向成分を $D\Omega_x$ とすると、 σ_x を通して Δt 秒間に流入するノード数は $D\Omega_x \Delta y \Delta z \Delta t$ である。これに向かい合う微小面積 $\sigma_{x+\Delta x}$ を通して Δt 秒間に流れ出るノード数は $\{D\Omega_x + \Delta D\Omega_x\} \Delta y \Delta z \Delta t$ である。 σ_x から $\sigma_{x+\Delta x}$ へ至る間のノード数の変化分は Δt 秒間に

$$\Delta D\Omega_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

である。同じようにして σ_y から $\sigma_{y+\Delta y}$ へ、および σ_z から $\sigma_{z+\Delta z}$ へ至る間のノード数の変化分はそれぞれ Δt 秒間に

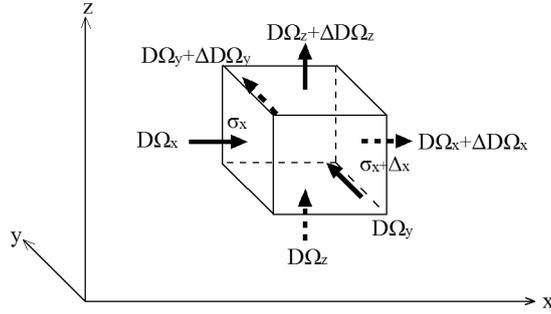


図 4.3: 空間上の体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 内におけるノード数の流れ

$$\Delta D\Omega_y \Delta z \Delta x \Delta t \quad \text{および} \quad \Delta D\Omega_z \Delta y \Delta x \Delta t$$

である。この直方体の中に発生の源があるとしよう。その源となる粒子は定義 VII により \hat{q} [nodes/unit_time] 放射する。このような粒子が個数密度 n [number/unit_volume] で存在すると、単位体積当たり単位時間当たりのノード発生数は

$$\hat{\rho} = n\hat{q} = nN_e \frac{c}{\Lambda} \quad [\text{nodes/unit_volume/unit_time}] \quad (4.12)$$

である。式 (4.6) の係数 α は物理量計測の単位換算の係数であるから、各辺に α をかけて CGS 静電単位を系にすると

$$\rho = nq \quad [\text{esu/cm}^3]$$

となる。直方体内部におけるノード数の減少と増加の合計を求めれば、 N を (4.11) 式の計数を使って

$$\Delta N \Delta V = -\{\Delta D\Omega_x \Delta y \Delta z \Delta t + \Delta D\Omega_y \Delta z \Delta x \Delta t + \Delta D\Omega_z \Delta y \Delta x \Delta t\} + \rho \Delta V \Delta t$$

となる。(4.8) と (4.10), (4.11) から $N = D/c$ を得て、上式の両辺を $\Delta V \Delta t = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ で割って

$$\frac{1}{c} \frac{\Delta D}{\Delta t} = -\left(\frac{\Delta D\Omega_x}{\Delta x} + \frac{\Delta D\Omega_y}{\Delta y} + \frac{\Delta D\Omega_z}{\Delta z} \right) + \rho$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ および Δt を無限小にとって次式を得る。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = -\left(\frac{\partial D\Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial D\Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial D\Omega_z}{\partial z} \right) + \rho \quad (4.13)$$

次にベクトルで表したノードの流れ $D\Omega$ について、図 4.4 に示すような微小な直方体内における平衡式を各成分毎に考えよう。このようなベクトル成分の平衡式を考えると、ノードの流れに従って内部で場の発生があることを想定しなければならない。観測座標系の相対的移動によって光行差にもとづき電場が誘導され、場の強さに変化が起きる。これは源に原因する場とは異なり、ノードの流れの中で誘導される場である。これを以下に示すようなノードベクトルの平衡式で表現する。まずベクトルノード密度 $N\Omega$ の x 方向成分 $N\Omega_x$ について流出流入分を計算する。 $\sigma_x (= \Delta y \Delta z)$ を通して Δt 秒間に流入する $D\Omega_x$ 成分は

$$D\Omega_x \Omega_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

である。これに向かい合う微小面積 $\sigma_{x+\Delta x}$ を通して Δt 秒間に流出する成分は $\{D\Omega_x \Omega_x + \Delta D\Omega_x \Omega_x\} \Delta y \Delta z \Delta t$ である。 σ_x から $\sigma_{x+\Delta x}$ へ至る間に $D\Omega_x$ 成分の変化する分は Δt 秒間に

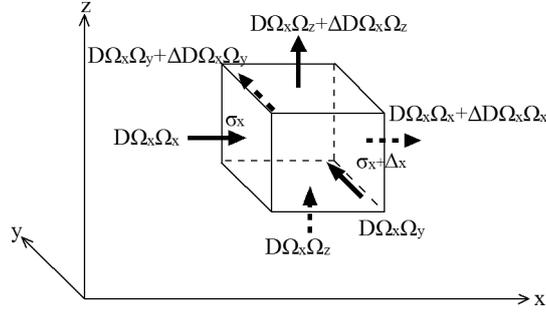


図 4.4: 空間上の体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 内における $N\Omega_x$ の流れ

$$\Delta D\Omega_x\Omega_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

である。同じようにして σ_y から $\sigma_{y+\Delta y}$ へ、および σ_z から $\sigma_{z+\Delta z}$ へ至る間に $D\Omega_x$ 成分が変化する分はそれぞれ Δt 秒間に

$$\Delta D\Omega_x\Omega_y \Delta z \Delta x \Delta t \quad \text{および} \quad \Delta D\Omega_x\Omega_z \Delta y \Delta x \Delta t$$

である。

この直方体の中に $N\Omega_x$ を発生したり消滅させる原因があるとしよう。その原因とはノードの流れの x 方向成分に変化を与えるものをいい、反射、屈折、減衰、非等方的なノードの発生、引きずり効果 (drag effect) などを含む。これら $N\Omega_x$ に与える効果を単位体積当たり単位時間当たりの x 方向ノード数で数えて

$$\hat{S}_x \text{ [nodes/unit_volume/unit_time]}$$

と表す。これに α を掛けて

$$S_x = \alpha \hat{S}_x$$

とする。この直方体内部におけるノード数 $N\Omega_x$ の変化は合計で

$$\begin{aligned} \Delta N\Omega_x \Delta V = & - \{ \Delta D\Omega_x\Omega_x \Delta y \Delta z \Delta t + \Delta D\Omega_x\Omega_y \Delta z \Delta x \Delta t + \Delta D\Omega_x\Omega_z \Delta y \Delta x \Delta t \} \\ & + S_x \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

となる。(4.8) と (4.10), (4.11) から $N = D/c$ を得て、上式の両辺を $\Delta V \Delta t = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ で割り、さらに $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ および Δt を無限小にとって次式を得る。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D\Omega_x}{\partial t} = - \left(\frac{\partial D\Omega_x\Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial D\Omega_x\Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial D\Omega_x\Omega_z}{\partial z} \right) + S_x \quad (4.14)$$

同様の計算をベクトルノード密度 $N\Omega$ の y 方向成分および z 方向成分について行くと、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D\Omega_y}{\partial t} = - \left(\frac{\partial D\Omega_y\Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial D\Omega_y\Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial D\Omega_y\Omega_z}{\partial z} \right) + S_y \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D\Omega_z}{\partial t} = - \left(\frac{\partial D\Omega_z\Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial D\Omega_z\Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial D\Omega_z\Omega_z}{\partial z} \right) + S_z \quad (4.16)$$

ノード流れの平衡式 (4.13)~(4.16) を 3 元ベクトルで表すと

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot D\Omega = \rho \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D\Omega}{\partial t} + \nabla \cdot D\Omega\Omega = S \quad (4.18)$$

となる。4 元ベクトルのダイアディックプロダクト (dyadic product) を使って次の形式にまとめられる。

$$\frac{\partial D\Omega^\mu \Omega^\nu}{\partial x^\nu} = S^\mu \quad (4.19)$$

ここに $x^{\nu=0} = ct$ であり、

$$\Omega^{\mu=0} = |\Omega| = \Omega_t = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = 1, \quad (4.20)$$

$$S^{\mu=0} = \rho \quad (4.21)$$

である。

上記のノード流れの平衡式は従来の流線、電束の概念からは決して導けない。ノード流れという概念があつて初めて可能になるものである。流体力学の場合は分子一つ一つが微小でその数を数えられないために体積当たりの質量という連続量を用いているが、電場の場合もそれと同様に分節線ノードを考え、計測の単位として N_e や N_0 を考え、これを分割可能な連続量としてとらえれば納得のいくことである。流体における流れ速度に相当するものはここでは光速 c である。

4.3 ノード流れの場から電磁方程式を導く

3.6 節では、従来の電気力線による電磁場を仮定して、磁場及び誘導電場は光行差から導かれる関係式、(2.61), (2.75) によって発生すると考え、マックスウエルの電磁方程式を導く試みを行ってきた。前節においてはノード流れの考えを取り入れて、その平衡式を基本方程式とした。このように電磁場をノード流れの場と解釈し直してもなお、マックスウエル方程式に同等な電磁方程式に至ることができるであろうか。この節ではこの疑問に答える。

この理論ではまず基本的なノード流れの場があり、その場の基本方程式は対称テンソルで表されている。観測にかかる電磁場の原因となる場は源から流れ出る分節線の空間への伝播である。これから出発して反対称テンソルへと移行する。この移行のアルゴリズムは光行差の理論が指し示すところによるものであり、それによれば飛行粒子とともに移動する観測系のローレンツ変換が関わってくる。移行過程は次の 3 ステップからなる。

- (1) 飛行するノード流れの場が構成する光行差による誘導場を考える。系 I - 1 に取り扱った 4 元光行差ベクトルの構成要素の一つを得るために、飛行する場の源とともに移動する系を K^0 系として (4.19) の両辺をローレンツ変換する。

$$\frac{\partial x^{0,\mu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial D\Omega^\lambda \Omega^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{0,\mu}}{\partial x^\lambda} S^\lambda$$

ここに $\partial x^{0,\mu}/\partial x^\lambda$ は (3.20) で表される係数である。(4.1), (4.2) を適用すれば次式を得る。

$$\frac{\partial D\Omega^\nu \Omega^{0,\mu}}{\partial x^\nu} = \tilde{S}^\mu \quad (3.62)$$

ここでは上付き"0"は場の源となる粒子を静止する様にみる系における場の量、すなわち K 系にいる観測者に対して相対速度 v をもつ系における測定量を示す。 \tilde{S}^μ の空間的および時間的要素の 3 元ベクトル表現は (3.73) および (3.76) と同じである。

- (2) 4 元光行差ベクトルのもう一つの構成要素を求めるために、(3.62) の Ω と Ω^0 の添字 μ, ν を交換して与えられる変量を \tilde{R}^μ とする。

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\nu} = \tilde{R}^\mu \quad (3.61)$$

(3.61) から (3.62) を辺々差し引く。

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial D\Omega^\nu\Omega^{0,\mu}}{\partial x^\nu} = \tilde{R}^\mu - \tilde{S}^\mu \quad (4.22)$$

- (3) すでに (3.59) で定義した反対称テンソル $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を使って (4.22) を次のように書く。

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \tilde{R}^\mu - \tilde{S}^\mu \quad (3.63)$$

上式の右辺を

$$\tilde{R}^\mu - \tilde{S}^\mu = \tilde{J}^\mu \quad (4.23)$$

と置くと次式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \tilde{J}^\mu \quad (4.24)$$

このようにして上の 3 ステップで 3.6 節に掲げた表式 (3.63) に到達する。すると同節に掲げるステップ (3) 以下の手順を踏むことにより、従来のマックスウエルの電磁方程式に対応した諸関係が得られる。

さてこのようにして得られた磁場および誘導電場は、分節されたノードの流れが観測者によって捉えられる光行差により発生する場である。定義 VII に与えられているように、ノード流れの場の源は 1 秒間当たり単位体積当たり発生するノード数 [nodes/sec] を数え、これに係数 α を掛けて [CGS.esu] 単位で表したものである。ノード流れの場についても同様にして単位面積当たり単位時間当たりの通過ノード数 [nodes/cm²/sec] に α を掛けて [CGS.esu] 単位で表したものである。従来理論における場や場の源は単位体積当たり発生する電気力線数を [CGS.esu] 単位で表したものであったから、結果としてノードの流れベクトルによる電磁場の基本式は同じ形式になると言える。すなわち 3.6 節における (3.64) 式以降は同じ表現形式が成立するということである。では違いは何かといえば、場の構成要素が線から分節に替わったことで、その後の場に対する基本的解釈と応用が変わってくることである。そのいくつかを次節以降で取り扱うことにしよう。

4.4 新理論におけるベクトルポテンシャル表示

3.6 節によれば

$$\frac{\partial D\Omega^\nu\Omega^{0,\mu}}{\partial x^\nu} = \tilde{S}^\mu \quad (3.62)$$

である。3.2 節に述べた系 I - 2 に規定する (3.3) を用いれば

$$\frac{\partial D\Omega^\nu\Omega^{0,\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \tilde{S}^\mu \quad (4.25)$$

とならなければならない。この式の最後の等式を3元ベクトルポテンシャルで表示すれば

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\tilde{\mathbf{S}} \quad (4.26)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\tilde{S}_t \quad (4.27)$$

を得る。また (3.62) の分子の μ と ν を交換した式は

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\nu} = \tilde{R}^\mu \quad (3.61)$$

であるから (3.3) の関係を用いれば

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \tilde{R}^\mu \quad (4.28)$$

となる。この式の最後の等式を3元ベクトルポテンシャルで表示すれば

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\tilde{\mathbf{R}} \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\tilde{R}_t \quad (4.30)$$

となり、上2式に出てくる () 内の値は3.8節に取り扱ったところによると (3.103) の左辺、 T に等しく、もしローレンツ条件が成立すれば $\tilde{\mathbf{R}}$ 及び \tilde{R}_t はゼロである。しかし高速の荷電粒子による電磁場の場合には一般にゼロには出来ない。そこで

$$\tilde{R}^\mu = -\frac{\partial T}{\partial x_\mu} \quad (4.31)$$

が成立する。

光行差理論では、ベクトルポテンシャル (\mathbf{A}, ϕ) はローレンツ条件を採用する事なしに (4.26), (4.27) のように明白な4元形式をもつ。また \mathcal{H} と $\delta\mathbf{E}$ について共変性を持っており、これを主体に方程式を書けばローレンツゲージを持ち込まなくてもよいことになる。この理論においては、電磁場は明白な共変性を持つ4元テンソル (ダイアディックプロダクト) $D\Omega^{0,\mu}\Omega^\nu$ によって表現される。電場と磁場が本質的に1つの”電磁場”であると認められるからには、場のふるまいを記述するには、 \mathcal{H} と $\delta\mathbf{E}$ それぞれ別な記号で記述されるのではなく、1つの実体として記述されることが望ましいであろう。

この方程式はマックスウエルの電磁方程式と等価ではない。その差は源の項にあり、マックスウエルの方程式で使われている源 \mathbf{J} および ρ とは次の関係で結ばれる。

$$\tilde{\mathbf{S}} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{j}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Delta D\Omega}{\partial t} \quad (4.32)$$

$$\tilde{S}_t = -4\pi\rho + \tilde{R}_t + \tilde{j}_t - \nabla \cdot D\eta\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (4.33)$$

方程式 (4.26) および (4.27) で用いている記号 \mathbf{A} , ϕ で表したベクトルポテンシャルは、厳密に言えば、従来の古典電磁気学で用いているものと同一ではないと解釈すべきであろう。なぜならば、これらを定義しているのは3.2節における系 I-2 であり、これが従来理論におけるベクトルポテンシャル表示と同じものであることを保証してはいないからである。本来なら別の記号を用いるべきかもしれないが、空間成分に関する定式 (3.2) は従来理論によるベクトルポテンシャルと同じ物理内容を表すので同じ記号を用いている。ただし低速の荷電粒子による電磁場においては漸近的にローレンツ条件に近づき、マックスウエルの方程式に一致する。

4.5 電磁場における安定な渦の存在の可能性

ノード流れの平衡式 (4.17), (4.18) は流体力学の基礎方程式に非常に似通った形をしている。ただ異なる点は流体に及ぼす圧力の勾配に係わる項および粘性抵抗の項を含まないことである。この2つは圧力勾配が無く、粘性を持たない非圧縮性の理想流体を想定すれば十分である。ヘルムホルツは1858年、流体の渦を運動論的に定義し、有名な「ヘルムホルツの渦定理」を明らかにした。これによると流体は非粘性で非圧縮性であり、外力が流体の満たされている空間で一価のポテンシャルを持つという条件下では、渦の強さは時間的に一定であって生ずることも消滅することもなく、一旦発生した渦はその強さが時間的に一定に保たれる [2]。一方、マックスウェルの電磁方程式は流体力学的な渦と磁場との類似性をいくつか示しながら、方程式の線形性のため、ヘルムホルツの渦定理を適用することができないとされている。

それにもかかわらず (4.17), (4.18) に示したノード流れの方程式によると、一定の条件のもとでヘルムホルツの渦定理が成立することを示すことができる。(4.18) に現れる $\nabla \cdot D\Omega\Omega$ および (4.17) に現れる $\nabla \cdot D\Omega$ は次のように変形できる。

$$\nabla \cdot D\Omega\Omega = D\Omega(\nabla \cdot \Omega) + (\Omega \cdot \nabla)D\Omega \quad (4.34)$$

$$\nabla \cdot D\Omega = D(\nabla \cdot \Omega) + (\Omega \cdot \nabla)D \quad (4.35)$$

ここでベクトルの公式から

$$\Omega \times (\nabla \times D\Omega) = [\Omega \cdot \{\nabla D\Omega\}] - (\Omega \cdot \nabla)D\Omega \quad (4.36)$$

が成立する。ここに $\{\}$ はテンソル積、 $[\]$ は行列積で次のような要素からなる。

$$[\Omega \cdot \{\nabla D\Omega\}] = \begin{bmatrix} (\Omega \cdot \nabla_x D\Omega) \\ (\Omega \cdot \nabla_y D\Omega) \\ (\Omega \cdot \nabla_z D\Omega) \end{bmatrix}$$

さらに $[\Omega \cdot \{\nabla D\Omega\}] = [D\Omega \cdot \nabla\Omega] + (\Omega \cdot \Omega)\nabla D$ と分解でき、 $[D\Omega \cdot \nabla\Omega] = (1/2)D\nabla(\Omega \cdot \Omega)$ であるから

$$[\Omega \cdot \nabla D\Omega] = \frac{1}{2}D\nabla(\Omega \cdot \Omega) + (\Omega \cdot \Omega)\nabla D \quad (4.37)$$

となる。(4.34) の右辺第2項に (4.36) の右辺第2項を代入し、 $(\Omega \cdot \Omega) = \Omega_t$ であることを考慮し、上記の関係を用いて (4.18), (4.17) を表すと

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D\Omega}{\partial t} - \Omega \times (\nabla \times D\Omega) + \frac{1}{2}D\nabla\Omega_t + \Omega_t\nabla D + D\Omega(\nabla \cdot \Omega) = S \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + D(\nabla \cdot \Omega) + (\Omega \cdot \nabla)D = q \quad (4.39)$$

を得る。上2式から $D(\nabla \cdot \Omega)$ を消去すれば

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D\Omega}{\partial t} - \Omega \times (\nabla \times D\Omega) + \frac{1}{2}D\nabla\Omega_t + \Omega_t\nabla D - \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + (\Omega \cdot \nabla)D \right\} = S - q\Omega \quad (4.40)$$

となる。ここで真空中の場の伝播を考えて源の項 S および q をゼロと置く。さらに次の仮定を置く。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + (c\Omega \cdot \nabla)D = 0 \quad (4.41)$$

この条件下で (4.40) は

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega} \times (\nabla \times D \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2} D \nabla \Omega_t + \Omega_t \nabla D = 0 \quad (4.42)$$

となる。両辺の *curl* をとると

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}) = 0 \quad (4.43)$$

ただし

$$\mathbf{L} = \nabla \times D \boldsymbol{\Omega} \quad (4.44)$$

である。もし速度 c を流体速度 v に置き換えるならば、これはヘルムホルツの渦の定理で出発の式となったものと同一である。(4.43) と (4.41) から渦 \mathbf{L} は生ずることも消滅することもできない性質を持つことが証明される。厳密な証明は Zommerfelt [2] が与えているのでここでは繰り返さない。

ここで我々は (4.41) を仮定した。この式は光速で伝播するノードの流れに沿ってとる "Substantial derivative" がゼロ、すなわち

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad (4.45)$$

であることを意味する。つまり場の伝播速度に沿ってノードフラックス密度が変化しない条件である。このような条件がどのようにして得られるかはまだ十分な研究がされてはいないが、一旦、完全に閉じた円形ループ状の電場ができ、 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向に沿う D の密度変化がない状態が実現できれば、ヘルムホルツの渦定理に従って渦度 \mathbf{L} が保存されることを示している。

参考文献

- [1] A. Sommerfeld, "Elektrodynamik", Vorlesungen uber Theoretische Physik, band III, 伊藤大介訳, "電磁気学", ゾンマーフェルト理論物理学講座 III, p289, 講談社 (1969) 東京
- [2] A. Sommerfeld, "Mechanics of Deformable Bodies" New York Academic Press, (1950), 訳本 島内輝、島内みどり、"変形流体の力学", 講談社、東京