量子論・古典論の統一はできるか
第I部　光行差とノード流れの場の理論　[第３章]

松原　邦彦

2020年2月28日

目 次

第3章　対称テンソルから導かれる電磁場

3.1　ダイアディックプロダクトによる電磁場の表現

従来の理論では電磁場が反対称テンソルで記述されてきた。一方、第2章において光行差による磁場、誘導電場の表現を導いてきたが、そこには確かに対称テンソル（ダイアディックプロダクト）による表現の可能性を示唆する結果が現れていた。それらの表現方法をここにまとめておこう。第2章で上付き添字0を付して移動系の観測量を表してきたが、相対論で移動系に属する変量として通常よく使われる記号 (') と同じである。また添字の i, j, k などのラテン文字は3次元ベクトルの要素を示す。観測者はK系にいるとしてその系の空間的距離と時間を基準にして次のベクトルを定義した。

$$\Omega_i = r_i/r, \tag{2.23}$$

$$\Omega_t = \Delta t/\Delta t, \tag{2.24}$$

$$\Omega_i^0 = r_i^0/r, \tag{2.36}$$

$$\Omega_t^0 = \Delta t^0/\Delta t. \tag{2.37}$$

ここで r_i, r_i^0 は観測者の位置を起点として、場の源となる粒子の位置までの距離ベクトルを表す。Δt, Δt^0 は源となる粒子から信号が発射された時刻をゼロ点として測る。E_0 を (2.59) で表す電場とし、次のスカラー量を表す記号を用いた。

$$D_0 = \epsilon E_0 = \frac{\epsilon e}{(r^0)^2} \tag{2.60}$$

上に掲げたベクトルと上記の D_0 を用いて光行差による磁場および電場の表現をすると

$$\mathcal{H}_i = \gamma D_0(\Omega_j\Omega_k^0 - \Omega_k\Omega_j^0)/(\Omega_t\Omega_t^0) \tag{2.62'}$$

$$E_i^* = \gamma D_0\Omega_i/\Omega_t \tag{2.74'}$$

$$\delta E_i = \gamma D_0(\Omega_t\Omega_i^0 - \Omega_i\Omega_t^0)/(\Omega_t\Omega_t^0) \tag{2.75'}$$

$$E_i = E_i^* + \delta E_i = \gamma D_0\Omega_i^0/\Omega_t^0 \tag{2.77'}$$

となる。ここに $(i = 1, 2, 3)$, $(j = 2, 3, 1)$, $(k = 3, 1, 2)$ をとる。電場ベクトルは2つの成分 E_i^* と δE_i からなり、E_i^* は電場の源から信号が伝播してくる方向の成分、δE_i は光行差により誘導される成分を示す。

さてここで $D_0 = \epsilon E_0$ であり、CGS 静電単位系を採用し、$\epsilon = 1$ であることを考慮し、$\Omega_t\Omega_t^0$ がスカラーであることに注意して、これを γD_0 と一緒にまとめて

$$D \equiv \frac{\gamma D_0}{\Omega_t\Omega_t^0} \tag{3.1}$$

と置くと、(2.62'), (2.75'), (2.77') は次のように書くことができる。

$$\mathcal{H}_i = D(\Omega_j\Omega_k^0 - \Omega_k\Omega_j^0) \tag{2.62''}$$

$$\delta E_i = D(\Omega_t\Omega_i^0 - \Omega_i\Omega_t^0) \tag{2.75''}$$

$$E_i = D\Omega_t\Omega_i^0 \tag{2.77''}$$

この表現をみると4元対称テンソルの形式をもつダイアディックプロダクト $\Omega_j^\mu\Omega^{0,\nu}$ によって電磁場が記述できることを示している。この章ではこれを追求し、マックスウエルの電磁方程式を光行差の理論より組み立てることができるかどうかを検討する。

3.2 光行差による電磁場のベクトルポテンシャル表現

マックスウエルの電磁方程式はファラディの法則と変位電流を含むアンペールの法則から成り立つ。このうちファラディの法則は前記の $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ と $\delta\boldsymbol{E}$ のベクトルポテンシャル表現から導かれるのであるが、これは 3.4 節で明らかになる。ここではまずポテンシャル表示について述べる。光行差で表された磁場 $\mathcal{H}_i$ について、従来の電磁気学において行われてきたように、ベクトルポテンシャルを使用して、次のように表現する。

$$\mathcal{H}_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

この式を (2.62'') と比較すると

$$D\Omega_j\Omega_k^0 = \frac{\partial A_k}{\partial x_j}, \quad D\Omega_k\Omega_j^0 = \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

と置ける。そこで、その表現式を次のように4次元的に拡張してみよう。

系Ｉ－２　光行差で磁場 $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ が表されるとすれば、電磁気学的な場 $D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}$ は次の関係によってベクトルポテンシャルと結ばれる。

$$D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu} = -\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}, \quad (\mu,\, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{3.3}$$

ここに 4 次元ベクトルの記法は

$$\Omega^\mu = (\Omega_t,\ \boldsymbol{\Omega}), \tag{3.4}$$

$$\Omega^{0,\nu} = (\Omega_t^0,\ \boldsymbol{\Omega}^0), \tag{3.5}$$

$$A^\nu = (\phi,\ \boldsymbol{A}) \tag{3.6}$$

とし、微分演算子は 4 元記法で

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \big(\frac{\partial}{c\partial t},\ -\boldsymbol{\nabla}\big) \tag{3.7}$$

と置いた共変ベクトルとする。4 次元拡張の関係式 (3.3) は一意的に決まるものではなく、他の形式も考えられるが、ここではそこから導き出される関係式が従来の理論と矛盾しない形式を採用している。従ってその関係づけ方は一つの系を構成する。これを系Ｉ－２と呼ぶことにする。

この記法のもとで、(3.3) において添字 $[\mu, \nu]$ が [1,0], [2,0], [3,0] の組み合わせをとると

$$D\boldsymbol{\Omega}\Omega_t^0 = \nabla\phi \tag{3.8}$$

となり、また添字 $[\mu,\nu]$ が [0,1], [0,2], [0,3] の組合わせをとると

$$D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.9}$$

となる。$\delta\boldsymbol{E}$ の表現 (2.75') に上 2 式を用いれば次のように置ける。

$$\delta\boldsymbol{E} = D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 - D\boldsymbol{\Omega}\Omega_t^0 = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.10}$$

つまり従来のポテンシャル表示が $\delta\boldsymbol{E}$ について成立するのである。

3.3　移動電荷に関するガウスの法則

誘導電場を含む電場は (2.77) で与えられる。ここで $\boldsymbol{\Omega}^0/\Omega_t^0$ はそれぞれの定義式から $\boldsymbol{r}^0/(c\Delta t_0)$ に等しく、$c\Delta t_0 = r^0$ であるから結局 $\boldsymbol{r}^0/r^0$ に等しい。また D の記法を (2.58), (2.59), (2.60), (3.1) によって元に戻した上で、$\epsilon = 1$ とすれば

$$\boldsymbol{E} = D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = \gamma D_0\frac{\boldsymbol{\Omega}^0}{\Omega_t^0} = \gamma\frac{e\boldsymbol{r}^0}{(r^0)^3} \tag{3.11}$$

である。我々が求めたいのは K 系に静止する観測者が観測する電場 (3.11) に関するガウスの法則である。K 系において場を観測する限り、$D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$ の源は点 P にあるとして取り扱えばガウスの定理に則って計算できると考えたいのであるが、しかし観測者が粒子の存在を確認できるのは信号発信から Δt 秒後であるから、移動電荷に対しては無理がある。粒子を静止するように見る系を採れば我々の主張する理論でも 3 次元のガウスの定理は十分受け入れられる。そこで先ずは K^0 系を採って上記電場のガウスの法則を記述する。上の式ののの γ は 2.5 節の基本表式 (2.58) に立ち戻って考えれば、飛行する荷電粒子に対する相対速度なので K^0 系では当然 1 と置かれる。図 2.1 において荷電粒子を座標原点に置き、座標原点に中心を持つ半径 r^0 の球面を、荷電粒子と共に移動する K^0 系の閉曲面 S' にとって積分を行うと

$$\oint_{S'}(D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0)_n dS' = e\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{r}^0}{(r^0)^3}dS' = 4\pi e \tag{3.12}$$

となる。ここに $(D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0)_n$ は ( ) 内のベクトルの球面の法線方向の成分を表す。単独の荷電粒子 e ではなく、多数の粒子が荷電密度 ρ_0 で集まっているとしよう。するとベクトルの発散定理を用いて上記の積分は次の形に書き換えられる。

$$\oint_{S'}(D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0)_n dS' = \int_{V'}\boldsymbol{\nabla}^0\cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 dV' = 4\pi\int_{V'}\rho_0 dV' \tag{3.13}$$

結果として次の関係式が得られる。

$$\boldsymbol{\nabla}^0\cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = 4\pi\rho_0 \tag{3.14}$$

ここで次の関係式が成立する。

$$\frac{\partial D\Omega_t\Omega_t^0}{c\partial t_0} + \boldsymbol{\nabla}^0\cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{\partial D\Omega_t\Omega_t}{c\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega} \tag{3.15}$$

4 元ベクトルで書くと

$$\frac{\partial D\Omega_t\Omega^{0,\iota}}{\partial x^{0,\iota}} = \frac{\partial D\Omega_t\Omega^{\iota}}{\partial x^{\iota}}, \quad (\iota = 0,1,2,3) \tag{3.16}$$

ここに $x^{0,\iota}$ は K^0 系における ι 番目の座標である。ただし、$x^0 = ct,\ x^{0,0} = ct_0,\ \Omega^0 = \Omega_t,\ \Omega^{0,0} = \Omega_t^0$ である。証明は次の通り。微分演算子と $\Omega^{0,\iota}$ のローレンツ変換は

$$\frac{\partial}{\partial x^{0,\iota}} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{0,\iota}} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \tag{3.17}$$

$$\Omega^{0,\iota} = \frac{\partial x^{0,\iota}}{\partial x^{\lambda}} \Omega^{\lambda} \tag{3.18}$$

と書かれる。ここに

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{0,\iota}} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c} v_x & \frac{\gamma}{c} v_y & \frac{\gamma}{c} v_z \\ \frac{\gamma}{c} v_x & 1 + \frac{v_x^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_y}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ \frac{\gamma}{c} v_y & \frac{v_y v_x}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_y^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_y v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ \frac{\gamma}{c} v_z & \frac{v_z v_x}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_z v_y}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_z^2}{v^2}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial x^{0,\iota}}{\partial x^{\lambda}} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c} v_x & -\frac{\gamma}{c} v_y & -\frac{\gamma}{c} v_z \\ -\frac{\gamma}{c} v_x & 1 + \frac{v_x^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_y}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_x v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ -\frac{\gamma}{c} v_y & \frac{v_y v_x}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_y^2}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_y v_z}{v^2}(\gamma - 1) \\ -\frac{\gamma}{c} v_z & \frac{v_z v_x}{v^2}(\gamma - 1) & \frac{v_z v_y}{v^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_z^2}{v^2}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

である。この変換を (3.16) の左辺に施すと

$$\frac{\partial D \Omega_t \Omega^{0,\iota}}{\partial x^{0,\iota}} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{0,\iota}} \frac{\partial x^{0,\iota}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial D \Omega_t \Omega^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \tag{3.21}$$

ここで

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{0,\iota}} \frac{\partial x^{0,\iota}}{\partial x^{\lambda}} = \delta_{\lambda}^{\kappa} \tag{3.22}$$

が成立する。$\delta_{\kappa\lambda}$ はクロネッカー記号である。この関係は (3.19) および (3.20) の各要素を用いて計算すれば直接証明される。式 (3.17)、および (3.22) の計算はやや冗長であるから第 I 部付録 A.1 に掲げておく。(3.16) の証明終わり。

式 (3.15) において K^0 系における電荷は時間的に一定であるから電荷が保存する限り

$$\frac{\partial D \Omega_t \Omega_t^0}{c \partial t_0} = 0 \tag{3.23}$$

でなければならない。式 (3.14) を (3.15) に代入した式から

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot D \Omega_t \boldsymbol{\Omega} = 4\pi\rho_0 - \frac{\partial D \Omega_t \Omega_t}{c \partial t} \tag{3.24}$$

が得られる。

計算の目的である電場 (3.11) について、$\boldsymbol{\Omega}^0$ のローレンツ変換 (2.45) を用いてその発散を求めよう。

$$D \Omega_t \boldsymbol{\Omega}^0 = D \Omega_t \boldsymbol{\Omega} - D \Omega_t (\Omega_t - \eta) \gamma \boldsymbol{v} / c \tag{3.25}$$

であるから、(3.11) の発散は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot D \Omega_t \boldsymbol{\Omega}^0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot D \Omega_t \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\nabla} \cdot D \Omega_t (\Omega_t - \eta) \gamma \boldsymbol{v} / c \tag{3.26}$$

と表される。上式右辺第 1 項には (3.24) を用いることができ、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = 4\pi\rho_0 - \frac{\partial D\Omega_t\Omega_t}{c\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t(\Omega_t-\eta)\gamma\boldsymbol{v}/c \tag{3.27}$$

となる。最後の項のうち $\boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\Omega_t\gamma\boldsymbol{v}/c$ の部分はベクトル $\boldsymbol{v}$ が空間的に一定値であるからゼロである。証明は単にガウスの定理を当てはめるだけなので付録 A.2.1 に詳細を掲げておく。一方 D と η は位置座標の関数であるから右辺の最後の項はゼロにはならない。結局 (3.27) は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = 4\pi\rho_0 - \frac{\partial D\Omega_t\Omega_t}{c\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot D\Omega_t\eta\frac{\boldsymbol{v}}{c} \tag{3.28}$$

となる。かくしてここに展開する光行差の理論においては移動する電荷に関するガウスの法則は従来の形式のような単純な表現式にはならない。

3.4 光行差理論による誘導電場とファラデーの法則

光行差の理論によれば、定常電流においても潜在的に誘電電場を有している。ただそれが現れないのは静止する反対符号の荷電粒子の場によって打ち消されているからである。飛行する単一の荷電の場合は光行差正弦の 4 次元的要素として本来の電場との合成により場の方向変化として表れており、決して新たな電場が発生するわけではない。しかし急激に変化する電場では打ち消すべき反対粒子の応答がないために顕在化すると解釈される。単独の荷電粒子の場合は光行差正弦の 4 次元的要素として存在し、荷電粒子による電場の一部を構成していると考えられる。いずれの場合でも第 2 章で定義した誘電電場 $\delta\boldsymbol{E}$ は存在しているとして矛盾は発生しない。

(3.10) の $curl$ をとり、$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\mathcal{H}}$、$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=\boldsymbol{0}$ とおけば次式を得る。

$$\boldsymbol{\nabla}\times\delta\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t} \tag{3.29}$$

光行差で表される誘導電場 $\delta\boldsymbol{E}$ は真空中のファラデーの法則と同じ形式を満たす。この理論の表式によれば上式は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\delta\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}D(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}^0) \tag{3.30}$$

となり、この式の右辺は光行差の時間変化率に対応する。したがってここに展開される理論においてはファラデーの法則を「静電場の伝播に関する光行差正弦の時間変化は誘導電場を発生させる」と言いかえる事ができる。このことが前章で $\delta\boldsymbol{E}$ を誘導電場と名付けた理由でもある。

一方、静電的な場と誘導電場との和である $\boldsymbol{E}$ の表現 (2.77") 右辺に (3.9) を用いると

$$\boldsymbol{E} = D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.31}$$

したがって

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t} \tag{3.32}$$

となり、この理論では従来理論におけると同様に $\boldsymbol{E}$ もファラデーの法則を満たすのである。一方、$\boldsymbol{E}^*$ は (3.8) に示したようにスカラーポテンシャルで表されるから

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{0} \tag{3.33}$$

である。これらの式が示すことは、従来理論における電磁誘導電場の発生 (3.32) は光行差理論による $\delta\boldsymbol{E}$ が担っている、ということである。

これらの電磁法則は場の変量と微分演算の交換関係から自動的に導かれる。光行差理論による磁場および誘導電場の表現と 4 元ベクトルポテンシャルの関係を使うと、微分演算子の可換性に基づいて次のような交換関係が見いだされる。(3.3) の両辺を x^λ で微分すると、微分演算子の可換性から

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial D\Omega_\lambda\Omega^{0,\nu}}{\partial x_\mu}$$

したがって

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial D\Omega_\lambda\Omega^{0,\nu}}{\partial x_\mu} \tag{3.34}$$

が成立する。この微分演算の交換関係からファラデーの電磁法則が導出される。交換関係 (3.34) において添字 $[\mu,\nu,\lambda]$ の組み合わせとして [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3] をとり、これらを順次足し合わせると

$$\frac{\partial D\Omega_z\Omega_y^0}{\partial x} + \frac{\partial D\Omega_x\Omega_z^0}{\partial y} + \frac{\partial D\Omega_y\Omega_x^0}{\partial z} = \frac{\partial D\Omega_x\Omega_y^0}{\partial z} + \frac{\partial D\Omega_y\Omega_z^0}{\partial x} + \frac{\partial D\Omega_z\Omega_x^0}{\partial y}$$

が得られ、上式の右辺を左辺に移項し、(2.62”) により $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ に書き換えれば

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{H}} = 0 \tag{3.35}$$

となって磁場の湧き出し無しの条件を示す式が得られる。

この関係式の中で、特に時間的要素を含む場合について記しておこう。式 (3.34) において μ, λ を $j, k = 1, 2, 3$ とし、$\nu = 0$ とした場合を考えると

$$\frac{\partial D\Omega_j\Omega_t^0}{\partial x_k} = \frac{\partial D\Omega_k\Omega_t^0}{\partial x_j}, \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{3.36}$$

と書くことができる。この交換関係の右辺を左辺に移項した上で、(2.77”) を使えば直ちに既に記した関係式 (3.33) が得られ、$\boldsymbol{E}^*$ は渦無しの条件を満たすことが示される。また (3.34) において μ, ν を $j, k = 1, 2, 3$、$\lambda = 0$ とした場合には、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_j\Omega_k^0}{\partial t} = -\frac{\partial D\Omega_t\Omega_k^0}{\partial x_j}, \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{3.37}$$

が成立する。そこで上式の両辺から、同式の j と k を入れ換えた関係式を辺々引いて

$$\frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_j\Omega_k^0}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_k\Omega_j^0}{\partial t} = -\frac{\partial D\Omega_t\Omega_k^0}{\partial x_j} + \frac{\partial D\Omega_t\Omega_j^0}{\partial x_k} \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{3.38}$$

を作る。これを 3 元ベクトルで書けば

$$\frac{1}{c}\frac{\partial D(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}^0)}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\times D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$$

となる。この式に (2.62”) および (2.77”) を使えば (3.32) が得られる。$\delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^*$ であるから (3.32) と (3.33) から (3.29) が導かれることは先に述べた通りである。このようにして系 I − 2 を導入すればファラデーの法則は誘導電場 $\delta\boldsymbol{E}$ に関する法則であると解釈することができる。そうすれば誘導電磁場の法則は微分演算子の交換関係から自然に導かれてくる。

3.5 光行差の理論とアンペールの法則

従来理論ではアンペールの法則は実験的事実にもとづいて導出されており、理論的に導出されたものではない。光行差による電磁場の理論に基づくとアンペールの法則を導出することができるが、得られる結果は相対論的に必ずしもつじつまの合ったものではない。この節ではまず従来理論のアンペールの法則の導出を行い、問題点を明らかにした上で修正を加えるべき電磁法則について提起することにしよう。

2.4 節で取り扱ったように、磁場 $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ は光行差ベクトルで表される。(2.63) の表現に (3.1) および (2.54) を用いれば

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = D(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0) = D(\Omega_t - \eta)\gamma \boldsymbol{v}/c \times \boldsymbol{\Omega} \tag{3.39}$$

とおける。この式は $\gamma(\Omega_t - \eta)$ なる因子を含むため、ビオーサバールの法則に則ったアンペールの法則には簡単には載らない。然るに $\gamma(\Omega_t - \eta) = 1$ に対応する (2.57') を使うと

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v}/c \times D\boldsymbol{\Omega} \tag{3.40}$$

となり、上の 2 式から

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{H} + \{\gamma(\Omega_t - \eta) - 1\}\boldsymbol{H} \tag{3.41}$$

を得る。式 (3.40) の $\boldsymbol{H}$ に $curl$ 演算（$\boldsymbol{\nabla}\times$）を施して

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v}/c \times D\boldsymbol{\Omega}) \tag{3.42}$$

とし、上式右辺に演算子を含むベクトルの計算公式

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.43}$$

を適用し、$\boldsymbol{v}$ が空間的に定数であることを考慮すると

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}(\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}) - (\frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \boldsymbol{\nabla})D\boldsymbol{\Omega} \tag{3.44}$$

となる。まず上式の右辺第 1 項を検討しよう。光行差の理論から導かれる移動系におけるガウスの法則として (3.24) が成り立っている。観測者を K 系に置く限り $\Omega_t = 1$ という値を持つから、これを代入したうえで (3.24) に $\boldsymbol{v}/c$ を掛け、$\boldsymbol{J} = \rho_0 \boldsymbol{v}$ とすれば

$$\frac{\boldsymbol{v}}{c}(\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\frac{\partial D\Omega_t}{c\partial t} \tag{3.45}$$

が得られる。次に (3.44) 右辺第 2 項は次の関係式を満たすことに注目しよう。

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})D\boldsymbol{\Omega} + \frac{\partial D\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \frac{dD\boldsymbol{\Omega}}{dt} \tag{3.46}$$

この式は、速度 $\boldsymbol{v}$ で移動する観測者が変量 $D\boldsymbol{\Omega}$ を観測するときの単位時間当たりの変化量をあらわし、「実質的微分係数」(substantial differential coefficient) と呼ばれる。飛行荷電粒子と共に走る観測者の系においては電場が空間的に分布していても、電荷が保存する限り実質的な時間的変化はゼロであるから、実質微分係数はゼロである。つまり

$$\frac{dD\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \boldsymbol{0} \tag{3.47}$$

したがって

$$(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{\nabla})D\boldsymbol{\Omega} = -\frac{\partial D\boldsymbol{\Omega}}{c\partial t} \tag{3.48}$$

となる。式 (3.44) は (3.45) と (3.48) によって

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\frac{\partial D\Omega_t}{c\partial t} + \frac{\partial D\boldsymbol{\Omega}}{c\partial t} \tag{3.49}$$

を得る。ここで荷電粒子の速度を一定とみなすと上式の右辺第 2 項と第 3 項はまとめることができ、分子の括弧内は相対論的に厳密な $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{\Omega}^0$ との関係 (3.25) において $\gamma(\Omega_t-\eta)\simeq 1$ と置いた近似式によって

$$D(\boldsymbol{\Omega}-\Omega_t\boldsymbol{v}/c)\simeq D\boldsymbol{\Omega}^0 = D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = \boldsymbol{E} \tag{3.50}$$

と置くことができる。したがって (3.49) は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{c\partial t} \tag{3.51}$$

となり、変位電流を含んだアンペールの法則の微分形が得られる。光行差の理論から見ればこの法則は $\gamma(\Omega_t-\eta)\simeq 1$ の場合に成り立つ近似法則である。(3.41) と (3.51) が意味するところは、任意の速度の荷電粒子によって発生する磁場 $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ のうち、$\{\gamma(\Omega_t-\eta)-1\}\boldsymbol{H}$ をゼロと置いた部分について従来理論のアンペールの法則が成り立つ、ということである。

ではアンペールの法則は相対速度が高い場合には成立しないのであろうか。光行差の理論に基づく磁場は厳密には (3.39) であるから、その *curl* 演算、(3.42) に相当する式は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\nabla}\times\{\gamma\boldsymbol{v}/c\times D(\Omega_t-\eta)\boldsymbol{\Omega}\} \tag{3.52}$$

となる。$D(\Omega_t-\eta)=D'$ と置けば、演算子を含むベクトルの計算公式 (3.43) を適用して

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{H}} = \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}(\boldsymbol{\nabla}\cdot D'\boldsymbol{\Omega}) - (\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{\nabla})D'\boldsymbol{\Omega} \tag{3.53}$$

と書ける。この式の右辺第 1 項の $D'\boldsymbol{\Omega}$ の発散は (3.24) を求めた時と同様の手順によって求められ、(3.24) の中の D を D' で置き換えた式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot D'\boldsymbol{\Omega} = 4\pi\rho_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial D'\Omega_t}{\partial t} \tag{3.54}$$

が成立する。この関係式の証明もまたガウスの発散定理の適用なので付録 A.2.2 に掲げ、ここでは詳細を省略する。

次に (3.53) 右辺第 2 項について考えよう。(3.46) で取り扱ったように $D'\boldsymbol{\Omega}$ に関して「実質微分係数」がゼロであると仮定すると

$$(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{\nabla})D'\boldsymbol{\Omega} = -\frac{\partial D'\boldsymbol{\Omega}}{c\partial t} \tag{3.55}$$

である。そうすると (3.53) は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \gamma\frac{\partial D'\boldsymbol{\Omega}}{c\partial t} - \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\frac{\partial D'\Omega_t}{c\partial t} \tag{3.56}$$

となる。ここで $\boldsymbol{J}$ は非相対論的な表現 (3.45) と違って $\boldsymbol{J}=\gamma\rho_0\boldsymbol{v}$ である。$D\boldsymbol{\Omega}^0 = D\boldsymbol{\Omega}-D'(\gamma\boldsymbol{v}/c)$ であることを考慮すると上式の右辺第 2 項第 3 項の被微分関数は

$$\gamma D'(\boldsymbol{\Omega}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\Omega_t) = D\boldsymbol{\Omega} - \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}D'\Omega_t + \gamma D'\boldsymbol{\Omega} - D\boldsymbol{\Omega} = D\boldsymbol{\Omega}^0 + (\gamma D'-D)\boldsymbol{\Omega} \tag{3.57}$$

となり、$\gamma D' - D = \Delta D$ と表せば (3.56) は

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{c\partial t} + \frac{\partial \Delta D \boldsymbol{\Omega}}{c\partial t} \tag{3.58}$$

と記すことができる。ここに現れる従来理論との差は荷電粒子の速度が光速度に比べ小さいときは非常に小さく、その偏差は (2.65) あるいは図 2.4 に示した程度である。その原因は (2.61) における $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ の定義から発しており、光行差を表す方向ベクトルの一つ $\boldsymbol{\Omega}^0$ が Lorentz 変換によって運動方向の座標に変動をもたらす効果に基づくもので、光行差による磁場発生の理論ではその差をなくすことはできない。しかし $\gamma(\Omega_t - \eta) \approx 1$ とみなすと $\gamma D' = D$ となり、$\Delta D = 0$ となって従来の理論に一致してしまう。

以上の検討より結論されることは、場の変量であるベクトル $D\boldsymbol{\Omega}$ における空間座標成分のローレンツ収縮を無視すれば仮説 I に基づく光行差の理論は従来の電磁理論に一致し、そうでなければ極めて小さなある偏差を示す、ということである。

3.6 光行差の理論からマックスウエルの電磁方程式を導く試み

光行差による磁場の発生と誘導電場の発生の理論に基づくと、そこで導入した 4 元のダイアディックプロダクト $D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}$ から一貫した形式により電磁方程式を導くことが可能である。3.2 節に述べたように、自然な形で 4 元のベクトルポテンシャル表現が可能であり、その表現を通してファラディの法則が導かれる。しかもその法則は $\boldsymbol{E}$ でなく $\delta\boldsymbol{E}$ についてであった。しかしそれがマックスウエルの電磁方程式に一致するかというと完全には一致せず、前節に取り扱ったアンペールの法則に見られるように偏差が残る。ところが光行差を非相対論的な近似 ($\gamma \simeq 1$) にすると従来理論と一致する。そこでこの理論に基ずく電磁方程式と従来のマックスウエル電磁方程式を比較して、そこに発生してくる問題を検討しよう。

光行差により電磁場を表現する 4 次元形式は次の 5 ステップよりなる。

(1) 4 元のダイアディックプロダクト $D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}$ を用いて次式により反対称テンソル $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を定義する。

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu} - D\Omega^\nu\Omega^{0,\mu} \tag{3.59}$$

34 ページの (2.64") および (2.76') を用いて次の表現を得る。

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \delta E_x & \delta E_y & \delta E_z \\ -\delta E_x & 0 & \mathcal{H}_z & -\mathcal{H}_y \\ -\delta E_y & -\mathcal{H}_z & 0 & \mathcal{H}_x \\ -\delta E_z & \mathcal{H}_y & -\mathcal{H}_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

磁場及び誘導電場は光行差から導かれた関係式 (2.83) および (2.94) によって発生するというこの理論の柱をなす。

(2) 式 (3.59) を x^ν で偏微分し、左辺の二つの項を

$$\frac{\partial D\Omega^\mu\Omega^{0,\nu}}{\partial x^\nu} = \tilde{R}^\mu, \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial D\Omega^\nu\Omega^{0,\mu}}{\partial x^\nu} = \tilde{S}^\mu \tag{3.62}$$

と表すと、次の式が得られる。

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \tilde{R}^{\mu} - \tilde{S}^{\mu} \tag{3.63}$$

これらはベクトルポテンシャルとの関係では系 I − 2 に従っているから、3.4 節に述べたように場の変量と微分演算子の交換関係から必然の結果としてファラディの法則は $\boldsymbol{E}$ に関する法則でなくて $\delta\boldsymbol{E}$ に関する法則として (3.32) および $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ の湧き出しなしを示す式 (3.35) が直ちに出てくる。

(3) 次のような反対称テンソルを導入する。

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x^* & E_y^* & E_z^* \\ -E_x^* & 0 & 0 & 0 \\ -E_y^* & 0 & 0 & 0 \\ -E_z^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

ここに $E_i^*, (i = x, y, z)$ は (2.68) で表される場の変量である。これを x^{ν} で偏微分し、縮約して

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \tilde{\mathrm{j}}^{\ \mu} \tag{3.65}$$

と表す。マックスウエルの電磁場方程式の構成要素と (3.60) と比較してみるとすぐわかるように、従来の電磁場テンソルに現れる $\boldsymbol{E}$ の代わりに $\delta\boldsymbol{E}$ が現れる。光行差の理論では $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^* + \delta\boldsymbol{E}$ の関係があるから、マックスウエルの電磁場方程式の構成要素に揃えるためにこのような反対称テンソルの導入が必要となる。

(4) 式 (3.64) を (3.60) の両辺に加えて

$$\frac{\partial(\tilde{F}^{\mu\nu} + G^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} = \tilde{R}^{\mu} - \tilde{S}^{\mu} + \tilde{\mathrm{j}}^{\ \mu} \tag{3.66}$$

とする。この操作は "$D\boldsymbol{\Omega}\Omega_t^0 - D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$ を $D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$ に置き換える" ことを意味している。ここで $\tilde{F}^{\mu\nu}$ に $G^{\mu\nu}$ を加えたものを $F^{\mu\nu}$ とし、(2.90) を使えば次式を得る。

$$\tilde{F}^{\mu\nu} + G^{\mu\nu} =$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & \mathcal{H}_z & -\mathcal{H}_y \\ -E_y & -\mathcal{H}_z & 0 & \mathcal{H}_x \\ -E_z & \mathcal{H}_y & -\mathcal{H}_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

(5) 式 (3.66) 右辺を

$$\tilde{R}^{\mu} - \tilde{S}^{\mu} + \tilde{j}^{\mu} = \mathcal{J}^{\mu} \tag{3.68}$$

と置けば

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \mathcal{J}^{\mu} \tag{3.69}$$

となって形式的にはマックスウエルの電磁方程式第 2 組に一致する。マックスウエルの電磁方程式第 1 組については (3.2) が成立する限り 3.2 節に述べたところにより自動的に成立している。

しかし問題はその源の項 (3.68) である。従来理論には現れない項を複数含んでおり、その内容を以下に詳細に検討しよう。この表式の左辺を 3 次元ベクトル表示すれば $\tilde{S}^\mu = (\tilde{S}_t,\ \tilde{\boldsymbol{S}})$, $\tilde{R}^\mu = (\tilde{R}_t,\ \tilde{\boldsymbol{R}})$, $\tilde{j}^\mu = (\tilde{j}_t,\ \tilde{\boldsymbol{j}})$ として、

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \tilde{\boldsymbol{R}} - \tilde{\boldsymbol{S}} + \tilde{\boldsymbol{j}} \tag{3.70}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \tilde{R}_t - \tilde{S}_t + \tilde{j}_t \tag{3.71}$$

となる。ここに $\tilde{\boldsymbol{R}} - \tilde{\boldsymbol{S}}$ は電流素の空間部分を表し、

$$\tilde{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}^0)\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t^0 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \tag{3.72}$$

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega}^0 + \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t \boldsymbol{\Omega}^0}{\partial t} \tag{3.73}$$

$$\tilde{\boldsymbol{j}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t^0 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \tag{3.74}$$

であり、時間部分は

$$\tilde{R}_t = \boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}^0 \Omega_t + \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t \Omega_t^0}{\partial t} \tag{3.75}$$

$$\tilde{S}_t = \boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}\Omega_t^0 + \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t \Omega_t^0}{\partial t} \tag{3.76}$$

$$\tilde{j}_t = \boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}\Omega_t^0 \tag{3.77}$$

である。

$\boldsymbol{\Omega}^0$ に (2.39') を適用すれば、$\boldsymbol{v}$ は空間的に定数であるから、

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega}^0)\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})D\gamma(\Omega_t - \eta)\boldsymbol{\Omega}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega}^0 = (\boldsymbol{\nabla} \cdot D\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{\nabla} \cdot D\gamma(\Omega_t - \eta)\boldsymbol{\Omega}\}$$

である。いま $D' = D(\Omega_t - \eta)$ と置き、$\Omega_t = 1$ であることを考慮すれば

$$\tilde{\boldsymbol{R}} - \tilde{\boldsymbol{S}} + \tilde{\boldsymbol{j}} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}(\boldsymbol{\nabla} \cdot D'\gamma\Omega_t\boldsymbol{\Omega}) - (\frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \boldsymbol{\nabla})D'\gamma\Omega_t\boldsymbol{\Omega} - \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t \boldsymbol{\Omega}^0}{\partial t} \tag{3.78}$$

となる。実質微分係数をゼロと置いた (3.55) の関係が成立し、これに Ω_t を掛けた式と (3.54) の関係式、および記号 $\rho = \gamma\rho_0$, $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$ を用いると (3.78) は

$$\tilde{\boldsymbol{R}} - \tilde{\boldsymbol{S}} + \tilde{\boldsymbol{j}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial D'\gamma\Omega_t\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\frac{\partial D'\gamma\Omega_t\Omega_t}{c\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0}{\partial t} \tag{3.79}$$

と書ける。ここで (3.57) の関係を用いれば

$$\tilde{\boldsymbol{R}} - \tilde{\boldsymbol{S}} + \tilde{\boldsymbol{j}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Delta D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \tag{3.80}$$

となる。ただし $\Delta D = \gamma D' - D$ である。次に (3.71) 右辺の源の項は (3.75), (3.76), (3.77) により $\boldsymbol{\nabla} \cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0$ となり、これにに (3.28) を適用すると

$$\tilde{R}_t - \tilde{S}_t + \tilde{j}_t = \boldsymbol{\nabla} \cdot D\Omega_t\boldsymbol{\Omega}^0 = 4\pi\rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot D\Omega_t\eta\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t\Omega_t}{\partial t} \tag{3.81}$$

となる。結局 (3.71), (3.70) は

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Delta D \Omega_t \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \tag{3.82}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_0 + \nabla \cdot D\Omega_t \eta\gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial D\Omega_t\Omega_t}{\partial t} \tag{3.83}$$

となって、(3.82) は当然のことながら (3.58)、(3.28) に一致する。

さてここで上記の方程式がマックスウエルの電磁方程式第 2 組に一致する条件を列挙すれば次の 2 つになる。

(1) $\gamma(\Omega_t - \eta) \simeq 1$ と見做せる。

(2) 電荷が保存する。

上記 (1) の条件は電場の空間成分のローレンツ収縮を無視する条件である。これで $\Delta D \simeq 0$ となり、(3.82) 右辺第 2 項は消える。条件 (1) が成立すると $\Omega_t = 1$ と置いて $\eta = (\gamma - 1)/\gamma$ が成立する。このとき (3.83) の右辺第 2 項はゼロとなる (付録 A.2.1)。条件 (2) が加わることで同式右辺第 3 項の時間偏微分の項はゼロになる。マックスウエル方程式がアンペール－マックスウエルの式、ファラディの法則、ガウスの法則、それに磁場の発散がゼロの条件よりなるとすると、このうちアンペール－マックスウエルの式は 3.5 節前半に述べたように条件 (1) で光行差の理論と完全に一致する。このようにして光行差の理論からマックスウエルの電磁方程式に至ることはできるが、相対論的に厳密な光行差の理論から見ればマックスウエル方程式は近似理論となってしまう。

3.7 光行差理論の場におけるゲージ変換

従来理論におけるゲージ変換の理論は次のように記述されている。ある任意のスカラー関数 χ を用いて

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\chi, \tag{3.84}$$

$$\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{3.85}$$

と変換しても磁場および電場の表現式

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{3.86}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{3.87}$$

が不変に保たれるということである。式 (3.84), (385) の右辺第 2 項は一般にゼロと異なる値を持つが、電磁法則の記述の中では消去され、法則の形を変えないという特質を持つ。光行差の理論による磁場および電場の表現式として、3.2 節の系 I － 2 を用いてこのゲージ不変の性質を記述すると、どのようになるかを検討しよう。

まずベクトルポテンシャル表現における $\boldsymbol{A}$ と $\nabla\chi$ との関係を示しておこう。式 (3.84) と (3.85) を x_k で偏微分すると

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \to \frac{\partial A_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\nabla_k\chi, \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \to \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{3.89}$$

となる。関係式 (3.3) を関数 χ に適用すると

$$\nabla_k \chi = D_\chi \Omega_k \Omega_t^0, \tag{3.90}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} = -D_\chi \Omega_t \Omega_t^0 \tag{3.91}$$

と表せる。ここに D_χ は任意の大きさをもつスカラー関数 χ によって形成される場の大きさである。$D_\chi \Omega_k \Omega_t^0$ は一つのベクトルポテンシャルであり、$D_\chi \Omega_t \Omega_t^0$ は一つのスカラーポテンシャルであるから (3.3) の関係が成立する。従って (3.88) と (3.89) は

$$D\Omega_j \Omega_k^0 \to D\Omega_j \Omega_k^0 + D_\chi \Omega_t^0 \Omega_j \Omega_k$$
$$D\Omega_j \Omega_t^0 \to D\Omega_j \Omega_t^0 + D_\chi \Omega_t^0 \Omega_j \Omega_t$$

となる。D_χ は任意の大きさを表すから $D_\chi \Omega_t^0$ をあらためて $\to D_\chi$ としても構わない。各項に共通な変数 Ω_j を消去すると次の変換則が得られる。

$$D\mathbf{\Omega}^0 \to D\mathbf{\Omega}^{\mathbf{0}} + D_\chi \mathbf{\Omega} \tag{3.92}$$

$$D\Omega_t^0 \to D\Omega_t^0 + D_\chi \Omega_t \tag{3.93}$$

これが光行差で表される電磁場理論のゲージ変換となる。

$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ と $\delta \boldsymbol{E}$ の表現はすでに取り扱ったように

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = D\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}^0$$
$$\delta \boldsymbol{E} = D\Omega_t \mathbf{\Omega}^0 - D\Omega_t^0 \mathbf{\Omega}$$

である。そこでこれらに対して (3.92), (3.93) の変換を行うと

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathbf{\Omega} \times (D\mathbf{\Omega}^0 + D_\chi \mathbf{\Omega}) = D\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}^0 + D_\chi \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} = D\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}^0 \tag{3.94}$$

$$\delta \boldsymbol{E} = (D\mathbf{\Omega}^{\mathbf{0}} + D_\chi \mathbf{\Omega})\Omega_t - (D\Omega_t^0 + D_\chi \Omega_t)\mathbf{\Omega} = D\Omega_t \mathbf{\Omega}^0 - D\Omega_t^0 \mathbf{\Omega} \tag{3.95}$$

となり、$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ と $\delta \boldsymbol{E}$ は不変に保たれる。上記のうちベクトル $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ については自明なので省略し、ベクトル $\delta \boldsymbol{E}$ について不変となる様子を図 3.1 に示す。同図で $D\mathbf{\Omega}^0$ に Ω_t を掛けたベクトルを $\overrightarrow{op_0}$ とし、$D\mathbf{\Omega}\Omega_t^0$ を $\overrightarrow{op_1}$ とするとゲージを加える前の誘導電場は $\overrightarrow{p_1 p_0}$ で表される $\delta \boldsymbol{E}$ である。$D\mathbf{\Omega}^0 \Omega_t$ に $D_\chi \mathbf{\Omega} \Omega_t$ を加えたベクトル $\overrightarrow{op_2}$ が (3.95) の 1 番目の等号の右辺第 1 項のベクトルを示し、$\overrightarrow{op_3}$ が同式 1 番目の等号の右辺第 2 項のベクトルを示す。ベクトル $\overrightarrow{p_0 p_2}$ は $D_\chi \mathbf{\Omega} \Omega_t$ を示し、ベクトル $\overrightarrow{p_1 p_3}$ はこれに平行なので、結局 $\overrightarrow{op_2}$ と $\overrightarrow{op_3}$ の差である $\overrightarrow{p_3 p_2}$ はゲージを加える前のベクトル $\delta \boldsymbol{E}$ に等しい。

この類推から (3.92) および (3.93) において上付き"0"のついた変量と付かない変量を入れ替えた式

$$D\mathbf{\Omega} \to D\mathbf{\Omega} + D_\chi \mathbf{\Omega}^0 \tag{3.96}$$

$$D\Omega_t \to D\Omega_t + D_\chi \Omega_t^0 \tag{3.97}$$

を考えてみよう。そうすると

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = D\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}^0 + D_\chi \mathbf{\Omega}^0 \times \mathbf{\Omega}^0 = D\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}^0, \tag{3.98}$$

$$\delta \boldsymbol{E} = (D\Omega_t + D_\chi \Omega_t^0)\mathbf{\Omega}^0 - (D\mathbf{\Omega} + D_\chi \mathbf{\Omega}^0)\Omega_t^0 = D\Omega_t \mathbf{\Omega}^0 - D\Omega_t^0 \mathbf{\Omega} \tag{3.99}$$

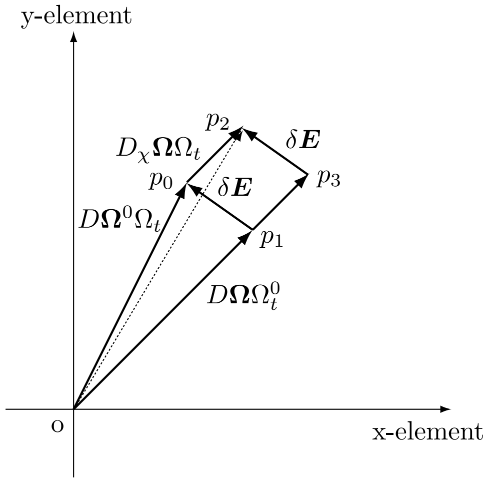

図 3.1: 光行差理論における (3.95) 式のゲージ不変性の説明

となってやはり値に変化がない。つまり光行差によって表された $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\delta\boldsymbol{E}$ は (3.96), (3.97) の変換に対しても不変に保たれる。

式 (3.99) の関係を図 3.2 に示した。$D\boldsymbol{\Omega}$ に Ω_t^0 を掛けたベクトルを $\overrightarrow{op_0}$ とし、$D\boldsymbol{\Omega}^0\Omega_t$ を $\overrightarrow{op_1}$ とするとゲー

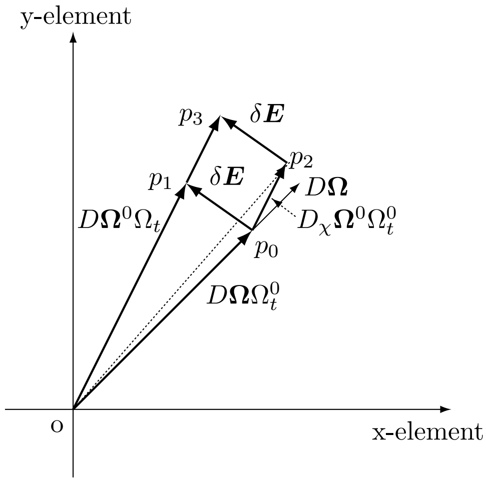

図 3.2: 光行差理論における (3.99) 式のゲージ不変性の説明

ジを加える前の誘導電場は $\overrightarrow{p_0p_1}$ で表される $\delta\boldsymbol{E}$ である。これに p_0 を始点に $D_\chi\boldsymbol{\Omega}^0\Omega_t^0$ を加えたベクトル $\overrightarrow{op_2}$ が (3.99) の 1 番目の等号の右辺第 2 項を表す。ベクトル $\overrightarrow{p_1p_3}$ はベクトル $\overrightarrow{p_0p_2}$ に平行であり、ベクトル $\overrightarrow{op_3}$ は同式の 1 番目の等号右辺第 1 項を表す。この 2 つのベクトルの差が $\overrightarrow{p_2p_3}$ で示される $\delta\boldsymbol{E}$ であって $D_\chi\boldsymbol{\Omega}^0\Omega_t^0$ を加える前の $\delta\boldsymbol{E}$ と変化がない。従来理論では $\boldsymbol{E}$ について不変であったが、この理論では $\delta\boldsymbol{E}$ に対して不変となっている。また加えても不変である場とは、観測者が観測する電場と同じ方向 $\boldsymbol{\Omega}$ を持つ電場か、または

飛行する荷電粒子からの確定信号の到達する方向 $\boldsymbol{\Omega}^0$ と同じ方向を持つ場である、ということになる。

3.8　ローレンツ条件に関する知見

電磁場がダイアディックプロダクトで表現された場合のローレンツ条件の表現について検討しよう。ローレンツ条件はベクトルポテンシャルのゲージ不変性を利用して１つの制限を加えたものである。ローレンツ条件を成立させるために加えるべき場は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\chi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial_t^2} \tag{3.100}$$

を満たす χ であった。そこで上式右辺をゼロにする χ をとって

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=0 \tag{3.101}$$

としている。

光行差理論による磁場、誘導電場の表現によって上式を書き換えてみよう。系 I − 2 によるベクトルポテンシャル (3.3) において $\mu=\nu$ とすれば

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=-D\Omega^\mu\Omega_\mu^0 \tag{3.102}$$

と表される。これを 3 次元ベクトルとスカラーで表現すると

$$D\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}^0-D\Omega_t\Omega_t^0=\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big) \tag{3.103}$$

となる。この表現形式からローレンツ条件について注目すべき知見が見出される。(3.101) の条件を上記の 3 次元ベクトルで書き換えれば

$$D(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}^0)-D\Omega_t\Omega_t^0=0 \tag{3.104}$$

となる。式 (3.103) 左辺を T と表して、$\boldsymbol{\Omega}^0$ と Ω_t^0 に (2.45') と (2.58) の表現を代入し、$\Omega_t=1$ を考慮して整理すると

$$T=D\big\{(1-\gamma)\Omega_t^2+\eta\frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Omega})\big\}=D(\gamma-1)\big\{(\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Omega})^2}{v^2}-1\big\} \tag{3.105}$$

と書くことができる。ここに η は (2.51) で表される。上記の値がゼロになる条件は、

a）γ が 1 であるとき

b）$\boldsymbol{v}$ の方向と $\boldsymbol{\Omega}$ の方向が一致するとき

である。前者は相対速度が小さい範囲（無限小ローレンツ変換の範囲）を意味している。後者は場の方向と相対速度の方向が一致するときで、光行差正弦がゼロになる条件である。つまり場の成分のうち速度 v の方向と同じ成分についてはローレンツ条件が常に成立している。上記以外の場合には、一般にゼロに等しい条件を見出すことは困難である。条件 a) はローレンツ変換において、速度の 2 次項を無視するとき成り立つ近似式

$$\boldsymbol{\Omega}\simeq\boldsymbol{\Omega}^0+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\Omega_t^0, \tag{3.106}$$

$$\Omega_t\simeq\Omega_t^0+\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Omega}^0)}{c} \tag{3.107}$$

を正当化する条件に他ならない。上 2 式は相対速度 v が無限に小さいときの変換、いわゆる無限小ローレンツ変換に従うときの関係式であって、光行差による場の理論によれば、ローレンツ条件は相対速度が小さい場合の電磁事象においては正当化されるが、高速荷電粒子においては一般に正当化されない。条件 b) は特殊な方向成分について成立するのであって、すべての成分について同時に成立させることはできない。

式 (3.104) の左辺を T とおいて、これにゲージ変換 (3.92), (3.93) を用いてみよう。

$$T = (D\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}^0 - D_\chi\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}) - (D\Omega_t^0\Omega_t - D_\chi\Omega_t\Omega_t) = D(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}^0) - D\Omega_t\Omega_t^0$$

または (3.96), (3.97) を用いて

$$T = (D\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}^0 - D_\chi(\mathbf{\Omega}^0\cdot\mathbf{\Omega}^0) - (D\Omega_t\Omega_t^0 - D_\chi\Omega_t^0\Omega_t^0) = D(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}^0) - D\Omega_t\Omega_t^0$$

となる。上 2 式の右辺の $D_\chi(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega} - \Omega_t\Omega_t)$ および $D_\chi(\mathbf{\Omega}^0\cdot\mathbf{\Omega}^0 - \Omega_t^0\Omega_t^0)$ はいずれも、どのような $D_\chi\mathbf{\Omega}$ または $D_\chi\mathbf{\Omega}^0$ を選ぼうとも恒等的にゼロとなり、したがって T をゼロにするような D_χ を選ぶことは不可能になる。T はゲージ不変となり、$\gamma \simeq 0$ のときを除いて、特定のゲージを選ぶ事によってゼロに調整しうるものではないことまでも示されてしまう。

マックスウェルの電磁方程式では $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{E}$ が不変に保たれ、明白な共変性を持たせたマックスウェル方程式を成立させるためにはローレンツ条件が必要とされる。上記の制限は従来理論の枠内で規定されるベクトルポテンシャルに関して言及するものではなく、系Ｉ－２により規定されるベクトルポテンシャルに関して成立することである。光行差の理論に基づく場の構造からみるとローレンツ条件は一般的には不自然である。量子電磁力学におけるローレンツ条件の諸問題を持ち出すまでもなく、古典論においても高速の粒子による電磁事象においては正当化されないと考えてよいのではないだろうか。

参考文献

[1] ランダウ, リフシッツ, ”場の古典論”, [電気力学、特殊および一般相対性理論], （原書第６版), 恒藤敏彦、広重徹　訳, 東京図書 (1997)

[2] Albert Einstein, ”The Meaning of Relativity”, Fifth Edition, Princeton University Press, (1955) (Princeton)

[3] A. Sommerfeld, ”Elektrodynamik”, Vorlesungen uber Theoretische Physik, band III, 日本語訳: 伊藤大介訳, ”電磁気学”, ゾンマーフェルト理論物理学講座 III, p289, 講談社 (1969) 東京

[4] Philip M. Morse and Herman Feshbach, ”Methods of Theoretical Physics”, part I, p213, McGRAW-HILL(1953), New York

[5] C. Møller, ”The Theory of Relativity”, p100, Oxford at the Clarendon Press(1952)

[6] John C. Slater, and Nathaniel H. Frank, ”Electromagnetism”, McGraw-Hill(1947), 日本語訳: スレイター・フランク共著、柿内賢信 訳、”電磁気学”丸善（株）(1988)