

量子論・古典論の統一はできるか  
第I部 光行差とノード流れの場の理論 [第2章]

松原邦彦

2020年2月28日

# 目次

<b>第 2 章 光行差による誘導電磁場の理論</b>	<b>11</b>
2.1 光行差によって磁場を表現する	11
2.2 光行差の相対論的取扱い	13
2.3 相対論的な光行差のベクトル表現	15
2.4 光行差による磁場発生 of 理論	18
2.5 光行差によって構成される誘導電場の理論	21
2.6 定常電流の解釈	23

## 第2章 光行差による誘導電磁場の理論

### 2.1 光行差によって磁場を表現する

図 2.1 に示すように P 点を飛行している荷電粒子を考える。この粒子は  $X$  軸に平行に、 $+x$  方向に速度  $v$  で移動しているとしよう。いま飛行荷電粒子が原点 P にあるとき時刻  $t = 0$  とし、この時、存在確定の信号を発したとする。観測者は定点  $O(x, y, z)$  にいて飛行荷電粒子から時刻  $t = \Delta t$  経過後に信号を受け取る。観測者がその信号を受けたときには荷電粒子は  $P_0$  点に来ているとしよう。いま飛行する荷電粒子とともに移動する系を  $K^0(x^0, y^0, z^0)$  とし、観測者の静止する系を  $K(x, y, z)$  とする。ここに  $r = \overline{PO}$ ,  $r^0 = \overline{P_0O}$  であり、

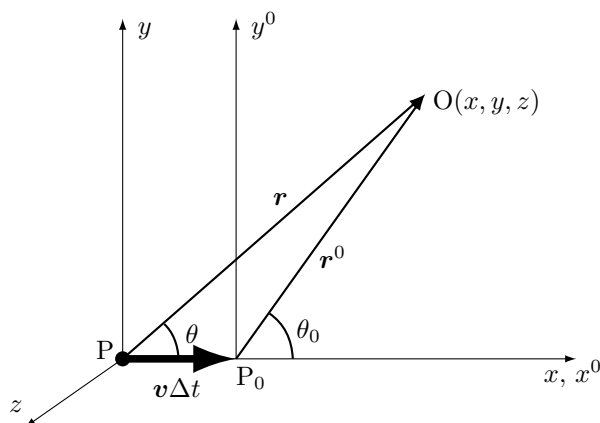


図 2.1: 速度  $v$  で  $+x$  方向に飛行する荷電粒子

$r$  と  $x$  軸とのなす角を  $\theta$  とし、 $r^0$  と  $x^0$  軸とのなす角を  $\theta_0$  とする。しばらくは  $z$  成分を無視し、とりあえず原理の説明を簡単にするため特殊相対性理論は考えずにガリレオ変換に従うとすると、

$$x^0 = x - vt, \quad y^0 = y \quad (2.1)$$

である。いま  $r = c\Delta t$  とし  $\sin \theta = y/r$ ,  $\sin \theta_0 = y^0/r^0$  から求められる関係式

$$\sin(\theta_0 - \theta) = \frac{v}{c} \sin \theta_0 \quad (2.2)$$

はよく知られた Bradley の光行差正弦と呼ばれる量である。この設定は通常の光行差について述べたテキスト [1] に取り扱われているものとは異なって、 $r$  と  $r^0$  および  $\theta$  と  $\theta_0$  が逆になっているが、その違いは天体観測においては観測者を移動系に置くことに依存している。

電荷を  $e$  として静電単位系を用いると、飛行荷電粒子による O 点での磁場は、Biot-Sabart の法則により

$$H = \frac{1}{c} \frac{ve \sin \theta_0}{(r^0)^2} = \frac{v}{c} \sin \theta_0 \frac{e}{(r^0)^2} \quad (2.3)$$

と表される。ここに距離を  $r^0$  とする。式を静電単位を用いて表したとき、右辺の分母に光速  $c$  が陽に現れ、これがこの理論の重要なヒントになり、この式を光行差によって記述する見通しが得られる。Bradley の光行差 (2.2) を用いると

$$H = \sin(\theta_0 - \theta) \frac{e}{(r^0)^2} \quad (2.4)$$

ここで、

$$E_0 = e/(r^0)^2 \quad (2.5)$$

とすれば (2.4) は

$$H = E_0 \sin(\theta_0 - \theta) \quad (2.6)$$

となる。この式は Biot-Sabart の法則について新しい解釈を与えるものであり、磁場の発生が光行差によって説明できることを意味している。磁場の大きさは光行差正弦の大きさに電場の大きさを掛けたものとなる。この解釈を一つの仮説として掲げる。

**仮説 I** 磁場は電場の伝播に関する光行差によって生じる。

多数の荷電粒子の流れからなる電流素  $idl$  を採っても、その構成要素である荷電粒子 1 つ 1 つについて上記の磁場が成立しており、それらの合成として磁場が発現しているとすればこの解釈は変わらない。仮説として掲げる理由は、磁場が光行差と関係するという解釈は決して従来の確立した理論、あるいは実験で確認されたものではないからである。光行差を磁場の原因とする解釈が一貫して成立するか否かを見きわめるには、多くの検証を経なければならない。

この光行差を生ずる 2 つの角度のうち、 $\theta$  については場が伝播してくる方向を示しているから、観測者が信号を受け取った時点で検出可能である。しかし、 $\theta_0$  については観測点 O において観測者が信号を受け取った時点における荷電粒子の実際の位置  $P_0$  に関するものであるから、近接作用の考えからは問題が生ずる。その情報はまだ到着していないから観測点に対して作用することができないのではないかという疑問である。式 (2.6) を存在確定論の立場から正当に解釈するためには、光行差を場の近接作用に基づいて説明する事が出来なければならない。存在確定の考え方に従い、荷電粒子から絶えることなく確定信号が放射されているとしよう。時刻  $t = 0$  に P 点から  $\theta$  方向に放射された確定信号が観測点 O に  $\Delta t$  秒かけて到着しているのであるが、その間にも荷電粒子からの確定信号は放射され続け、 $\theta$  方向に伝播する信号は観測点 O の近傍にも届いている。極く小さな時間  $t = \delta t$  秒後に源から発せられた確定信号が、点  $P_0$  と点 O を結ぶ線上の点  $O_m(x_m^0, y_m^0, z_m^0)$  に届いているとしよう。このとき  $x = v\delta t$  にあった粒子から発した存在確定信号が  $\Delta t - \delta t$  秒間に走った距離は図 2.2 に示す点線の部分であり、その長さは

$$r_m = c(\Delta t - \delta t) \quad (2.7)$$

である。点  $O_m$  は点  $P_0$  と点 O を結ぶベクトル  $\mathbf{r}$  に交わる点上にあり、粒子の移動とともに移動する  $K^0$  系にある。そこで  $O_m$  点の座標は K 系の値に変換すると

$$\begin{aligned} x_m^0 &= r_m \cos \theta - v(\Delta t - \delta t) = r_m(\cos \theta - v/c) \\ y_m^0 &= r_m \sin \theta = c\Delta t \sin \theta - c\delta t \sin \theta \end{aligned}$$

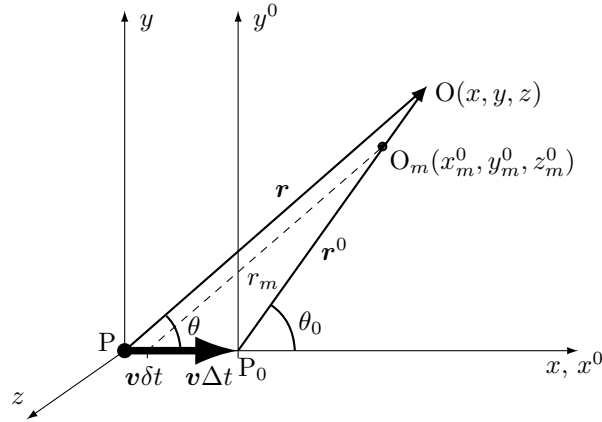


図 2.2: 飛行する荷電粒子から観測点 O の近傍に到着している  $\theta$  方向の確定信号

となり、 $c\Delta t(\cos\theta - v/c) = x^0$ ,  $c\Delta t \sin\theta = y^0$  であるから

$$x_m^0 = x^0 - c\delta t\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right), \quad y_m^0 = y^0 - c\delta t \sin\theta \quad (2.8)$$

となる。O<sub>m</sub> 点と O 点とが成す勾配を  $\tan\alpha$  とすれば

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y^0 - y_m^0}{x^0 - x_m^0} \quad (2.9)$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta - v/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (2.10)$$

と表せる。上の第 2 式から

$$\sin\alpha \cos\theta - \cos\alpha \sin\theta = \sin(\alpha - \theta) = \frac{v}{c} \sin\alpha \quad (2.11)$$

の関係が得られ、これを (2.2) 式と比較することによって  $\alpha = \theta_0$  であることがわかる。 $\delta t$  をどんなに小さくとっても (2.9), (2.10) の関係は変わらない。点 O<sub>m</sub> は方向  $\theta$  を一定にした放射信号の、時刻  $t = \Delta t$  における伝播前線であり、 $\theta_0$  はそれらを連ねた方向を意味する。イメージを描きやすくするために、ひとつのアナロジーを提示しよう。水上を速度  $v$  で走る機関銃装備の船を想定する。空中に向かって固定した角度に据え置かれた機関銃から弾丸を連射するとし、重力の影響を無視すれば、銃弾の弾頭列をなして一直線に並んで空中を走る。その連なる方向が  $\theta_0$  に相当し、一つ一つの銃弾の飛翔方向は  $\theta$  である。光行差を構成する角度のうち、確かに  $\theta_0$  はまだ観測者 O に信号が届いていない P の位置を向いている。しかし  $\delta t$  を無限小にとれば (2.9) は微分に移行することができる。この軌跡の向きは観測者の位置 O 点の近傍に微小な距離  $dr$  だけ観測点を移動することによって検出することが可能な量である。

## 2.2 光行差の相対論的取扱い

問題を相対論的に取り扱おうと、光行差を 4 元ベクトルで見通し良く記述することができる。図 2.1 に立ち戻り、K(x, y, z) 系は O 点に静止する観測者の座標系、K<sup>0</sup>(x<sup>0</sup>, y<sup>0</sup>, z<sup>0</sup>) 系は飛行粒子と同じ速度で移動する観

測者の座標系であるとするれば

$$x^0 = \gamma(x - vt), \quad (2.12)$$

$$y^0 = y, \quad z^0 = z \quad (2.13)$$

$$t^0 = \gamma(t - vx/c^2) \quad (2.14)$$

ただし、ここに

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.15)$$

一般的なテキストの記法から云えば、移動系における量  $x^0, y^0, r^0, \theta_0$  は  $x', y', r', \theta'$  を用いるべきかも知れない。しかしここでは荷電粒子を静止しているように見る座標系であることを強調するため、あえて上付き添字 0 を使用している。図 2.1 に示した角  $\theta, \theta_0$  を用いると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= x/r, & \sin \theta &= y/r, \\ \cos \theta_0 &= x^0/r^0, & \sin \theta_0 &= y^0/r^0 \end{aligned}$$

両系の時計は荷電粒子より確定信号が発せられた時刻をゼロとするように合わせ、このとき両系の原点が一致するように座標を設定する。光行差正弦は上式を使って

$$\sin(\theta_0 - \theta) = \sin \theta_0 \cos \theta - \cos \theta_0 \sin \theta = \frac{y^0 x - x^0 y}{r^0 r} \quad (2.16)$$

である。信号が O 点に到着した時刻を  $t = \Delta t = r/c$  とし、上式の最右辺に (2.12) および (2.13) を使うと

$$\sin(\theta_0 - \theta) = \left\{ (1 - \gamma) \cos \theta + \gamma \frac{v}{c} \right\} \sin \theta_0 \quad (2.17)$$

となる。

前節と同じように  $\theta$  を一定に固定したときの  $P_m$  点の変化を調べてみよう。図 2.2 において極く小さな時間  $t = \delta t$  秒後に源から発せられた確定信号が観測点の近傍の点  $O_m(x_m^0, y_m^0, z_m^0)$  に届いているとする。点  $O_m$  は前節で述べたとうり移動系  $K^0$  上の点である。したがって式 (2.12) と (2.13) において  $x$  として  $r_m \cos \theta$ 、 $t$  として  $r_m/c$  を代入して K 系での値に変換すると、 $O_m$  点の座標は

$$x_m^0 = \gamma r_m \left( \cos \theta - \frac{v}{c} \right), \quad y_m^0 = r_m \sin \theta \quad (2.18)$$

となる。(2.7) の  $r_m$  を上式に代入すると、 $\gamma c \Delta t (\cos \theta - v/c) = x^0$ 、 $c \Delta t \sin \theta = y^0$  であるから

$$x_m^0 = x^0 - \gamma c \delta t \left( \cos \theta - \frac{v}{c} \right), \quad y_m^0 = y^0 - c \delta t \sin \theta \quad (2.19)$$

と書かれる。ここで  $O_m$  点の変化の勾配を  $\alpha$  とすれば

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} = \frac{y^0 - y_m^0}{x^0 - x_m^0} \quad (2.20)$$

$$= \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - v/c)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2.21)$$

となる。上の第 2 式の関係から次式が導かれる。

$$\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta = \sin(\alpha - \theta) = \left\{ (1 - \gamma) \cos \theta + \gamma \frac{v}{c} \right\} \sin \alpha \quad (2.22)$$

式 (2.17) と比較すれば  $\alpha = \theta_0$ 、つまり  $(\alpha - \theta)$  は光行差であることがわかる。なお相対性理論と光行差に関する教科書においては式 (2.21) の形式で書き下すことが多いが、この表現式と (2.22) は同等である。かくして  $\alpha$  は静止する観測者からみて、移動する荷電粒子が  $\theta$  なる一定方向に放射する存在確定信号の伝播前線の軌跡をたどる向きを示す。この点については前節の議論と同じである。図 2.3 はこの様子を示している。同図の斜めに並ぶ小円はそれぞれの時点で  $\theta$  方向に放射された場の伝播の前線を示している。図 2.3 のプロットを計算したプログラムは参考資料 A-3 [11] に示してある。

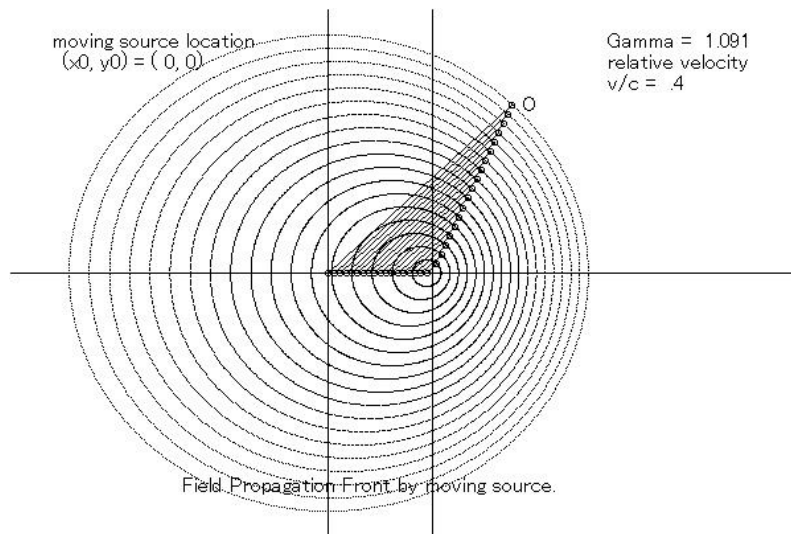


図 2.3:  $\theta_0$  が存在確定の信号の伝播前線を連ねた方向であることを説明する

$\theta$  は明らかに観測者が受け取る存在確定信号の飛来方向を観測者の属する座標系で捉えたものであり、信号の伝播前線の法線方向の  $x$  軸に対する角度を示している。 $\theta_0$  は飛行する粒子とともに移動する系で特定方向に放射される信号の各時点での先端を連ねた線を観測系から見た方向である。上記の考察に基づき、近接作用として光行差がもつ物理的意味を明確にしておくため、つぎのような定義を与えておこう。

**定義 II** [光行差]： 光行差とは次の 2 つの方向の差をいう。

- (1) 観測者が静止する系において観測点における場の伝播前線に対する法線方向と
- (2) 飛行する源から (1) と同一方向に放射された場の信号の各時点での先端座標を連ねた方向。

## 2.3 相対論的な光行差のベクトル表現

光行差を相対論的に取り扱うと、(3+1) 元ベクトルで見通し良く記述することができる。ここで場の伝播飛来する方向を示す単位ベクトルを導入しよう。

**定義 III** [確定信号の伝播方向 (3+1) 元ベクトル]： 飛行粒子から観測者の位置までの距離を  $r$  とし、系の時計は荷電粒子より確定信号が発せられた時刻をゼロとするように合わせておく。信号が O 点に到着した時刻を  $t = \Delta t = r/c$  としたとき、O 点にいる観測者が観測する信号の飛来方向を表す (3+1) 元ベ

クトルを

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.23)$$

$$\Omega_t = \frac{\Delta t}{\Delta t} \quad (2.24)$$

とする。

$\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\Omega_t$  は4元ベクトルを構成するから

$$(\Omega_t)^2 - (\Omega_x)^2 - (\Omega_y)^2 - (\Omega_z)^2 = 0 \quad (2.25)$$

が成立し、次の Lorentz 変換に従う。

$$\Omega_x^0 = \gamma\left(\Omega_x - \frac{v}{c}\Omega_t\right), \quad (2.26)$$

$$\Omega_y^0 = \Omega_y, \quad \Omega_z^0 = \Omega_z, \quad (2.27)$$

$$\Omega_t^0 = \gamma\left(\Omega_t - \frac{v}{c}\Omega_x\right) \quad (2.28)$$

これは観測系 (K 系) から移動系 ( $K^0$  系) への方向ベクトルの変換である。当然のことながら、これらは次の関係式を満たす。

$$(\Omega_t^0)^2 - (\Omega_x^0)^2 - (\Omega_y^0)^2 - (\Omega_z^0)^2 = 0 \quad (2.29)$$

上記の変換の逆変換式はそれぞれを逆に解くことによって得られ、

$$\Omega_x = \gamma\left(\Omega_x^0 + \frac{v}{c}\Omega_t^0\right), \quad (2.30)$$

$$\Omega_y = \Omega_y^0, \quad \Omega_z = \Omega_z^0, \quad (2.31)$$

$$\Omega_t = \gamma\left(\Omega_t^0 + \frac{v}{c}\Omega_x^0\right) \quad (2.32)$$

となる。式 (2.26)~(2.27) および (2.28) のそれぞれに  $r$  および  $\Delta t$  を掛けると、

$$r\Omega_x^0 = \gamma\left(r\cos\theta - \frac{v}{c}r\right) = \gamma(x - v\Delta t) = x^0 \quad (2.33)$$

$$r\Omega_y^0 = r\sin\theta = y = y^0, \quad r\Omega_z^0 = z = z^0 \quad (2.34)$$

$$\Delta t\Omega_t^0 = \gamma\left(\Delta t - \frac{vx}{c^2}\right) = \Delta t^0 \quad (2.35)$$

したがって次の関係を得る。

$$\boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{\mathbf{r}^0}{r} \quad (2.36)$$

$$\Omega_t^0 = \frac{\Delta t^0}{\Delta t} \quad (2.37)$$

さて観測者が  $K^0$  系においてその系を基準に距離と時間を決めるとこの関係は変わってくる。 $\boldsymbol{\Omega}^0$  は  $\mathbf{r}^0$  の方向を示すベクトルでなければならないからその大きさを表す  $\Omega_t^0$  と共に

$$\boldsymbol{\Omega}^0 = \frac{\mathbf{r}^0}{r^0} \quad (2.38)$$

$$\Omega_t^0 = \frac{\Delta t^0}{\Delta t^0} \quad (2.39)$$



でなければならない。しかしこれは (2.36), (2.37) と矛盾する。これをどう解釈するべきであろうか。観測者が K 系にいるとき K 系で測定される  $\mathbf{r}$  を基準にして方向を示す単位の大きさを持つベクトルが定義されているから、これに対して相対速度  $\mathbf{v}$  を持つ系の方向ベクトルは (2.36), (2.37) になる。もし観測者が  $K^0$  系にあればその系で測定される距離を基準にして方向ベクトルを定義せざるを得ないから (2.38), (2.39) となるのである。そしてこの時は (2.33)~(2.35) の  $\mathbf{r}$  を  $\mathbf{r}^0$  に、 $\Delta t$  を  $\Delta t^0$  に入れ替えた関係式

$$r^0 \Omega_x = \gamma(r^0 \cos \theta_0 + \frac{v}{c} r^0) = \gamma(x^0 + v \Delta t^0) = x \quad (2.40)$$

$$r^0 \Omega_y = r^0 \sin \theta_0 = y^0 = y, \quad r^0 \Omega_z = z^0 = z \quad (2.41)$$

$$\Delta t^0 \Omega_t = \gamma(\Delta t^0 + \frac{v x^0}{c^2}) = \Delta t \quad (2.42)$$

が成立し、

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r}}{r^0} \quad (2.43)$$

$$\Omega_t = \frac{\Delta t}{\Delta t^0} \quad (2.44)$$

となる。このように観測者がどの系にいて、どの系の距離と時間を基準にして計算するかによって  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\Omega_t$ ,  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{\Omega}^0$ ,  $\Omega_t^0$ ,  $\mathbf{r}^0$  との関係は変化する。もし観測者が  $K^0$  系を基準にして計算をすると想定した場合は  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\Omega_t$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\Delta t$  と  $\mathbf{\Omega}^0$ ,  $\Omega_t^0$ ,  $\mathbf{r}^0$ ,  $\Delta t^0$  を互いに交換し、 $\mathbf{v}$  を  $-\mathbf{v}$  に置き換えなければならない。相対論的光行差の理論においては事象の観測者がどの系にいて、時間と空間の基準をどの系にとるか、を常に意識しなければならない。以後に導く各関係式は、特別に断らない限り、観測者は K 系にいて時空間の基準を K 系にとる。

このように表した  $\mathbf{\Omega}$  および  $\mathbf{\Omega}^0$  について、(2.26)~(2.28) のローレンツ変換および (2.30)~(2.32) の逆変換を、一般的な座標の採り方でベクトル表示して、次のように書くことができる (例えば C.Møller [5] 参照)。

$$\mathbf{\Omega}^0 = \mathbf{\Omega} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Omega})}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \Omega_t, \quad \Omega_t^0 = \gamma\{\Omega_t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Omega})/c\} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}^0 + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Omega}^0)}{v^2}(\gamma - 1) + \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \Omega_t^0, \quad \Omega_t = \gamma\{\Omega_t^0 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Omega}^0)/c\} \quad (2.46)$$

これら確定信号の伝播方向ベクトルを用いて相対論的光行差正弦を表すことを考えよう。観測者が K 系にいて、図 2.1 に示す座標の取り方で、観測者 O が  $(x, y)$  平面上にいる場合、(2.25) 式から  $|\mathbf{\Omega}| = \Omega_t$  であるから

$$\Omega_x = \frac{x}{r} = \Omega_t \cos \theta, \quad \Omega_y = \frac{y}{r} = \Omega_t \sin \theta \quad (2.47)$$

である。一方、 $K^0$  系に関する量については  $\Delta t^0$  は  $r^0$  を光が走る時間であるとして  $r^0 = c \Delta t^0$  であり、(2.29) から  $|\mathbf{\Omega}^0| = \Omega_t^0$  であるから

$$\Omega_x^0 = \frac{x^0}{r^0} = \Omega_t^0 \cos \theta_0, \quad \Omega_y^0 = \frac{y^0}{r^0} = \Omega_t^0 \sin \theta_0 \quad (2.48)$$

である。式 (2.47) および (2.48) の  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta_0$ ,  $\cos \theta_0$  を (2.16) に代入すると、光行差正弦として

$$\sin(\theta_0 - \theta) = \frac{\Omega_y^0 \Omega_x - \Omega_x^0 \Omega_y}{\Omega_t \Omega_t^0} = \frac{(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}^0)_z}{\Omega_t \Omega_t^0} \quad (2.49)$$

が得られる。この関係が 3 次元ベクトルとして成立するとみなし、光行差正弦  $\sin(\theta_0 - \theta)$  をベクトル化して次のように定義する。

**定義 IV** [光行差ベクトル]: 式 (2.23) および (2.36) で表される単位ベクトル  $\boldsymbol{\Omega}$  および  $\boldsymbol{\Omega}^0$  を用いて

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0}{\Omega_t \Omega_t^0} \quad (2.50)$$

により表された  $\boldsymbol{\Theta}$  を光行差ベクトルと呼ぶ。

$\sin(\theta_0 - \theta)$  は図 2.1 に示す座標の取り方で、観測者 O が  $(x, y)$  平面上にいる特別な場合の光行差の表現であると見做す。一般的な座標の設定でこれを次のようなダイアディックプロダクトで表す。

$$\Theta_i = (\Omega_j \Omega_k^0 - \Omega_k \Omega_j^0)(\Omega_t \Omega_t^0)^{-1}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.50')$$

式を単純に表現するため

$$\frac{c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \eta \quad (2.51)$$

$$\frac{c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}^0)}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \eta^0 \quad (2.52)$$

とおくと、(2.45), (2.46) は

$$\boldsymbol{\Omega}^0 = \boldsymbol{\Omega} + (\eta - \Omega_t) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{v} / c \quad (2.45')$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^0 + (\eta^0 + \Omega_t^0) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{v} / c \quad (2.46')$$

と表される。この両者の関係から  $(\eta - \Omega_t + \eta^0 + \Omega_t^0) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{v} / c = 0$ 、したがって

$$\Omega_t - \eta = \Omega_t^0 + \eta^0 \quad (2.53)$$

これらを使って  $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0$  を計算すれば、 $\boldsymbol{\Omega}^0 \times \boldsymbol{\Omega}^0 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$  に注意して

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0 = (\eta^0 + \Omega_t^0) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{v} / c \times \boldsymbol{\Omega}^0 = (\Omega_t - \eta) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{v} / c \times \boldsymbol{\Omega} \quad (2.54)$$

が得られる。上記によれば次の関係が成立している。

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}^0 = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (2.55)$$

なお  $\gamma \simeq 1$  とすれば  $\eta = 0$ 、 $\Omega_t = 1$ 、したがって

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0 \simeq \boldsymbol{v} / c \times \boldsymbol{\Omega} \quad (2.56)$$

となる。

## 2.4 光行差による磁場発生の理論

Biot-Sabert の法則の吟味から始めよう。厳密に相対論的取扱いをした式は A.Sommerfeld [3] などによって取り扱われており、静電単位系で書き表すと

$$\boldsymbol{H} = \frac{e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{cr^3} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v \cos \theta/c)^3} \quad (2.57)$$

である。Biot-Sabert の法則では電流の源を起点としたベクトルを採るので、この理論で設定した距離  $r^0$  の取り方と一致する。むしろ光行差の座標の取り方、図 2.1 はそのように設定したと言ってよい。この式を光行差によって表すとどうなるであろうか。図 2.1 の座標設定のもとでは (2.45) 式第 2 式において  $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = v\Omega_t \cos \theta$  であり、 $\Omega_t = |\boldsymbol{\Omega}| = 1$  である。従って

$$\Omega_t^0 = \gamma(\Omega_t - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}/c) \rightarrow \gamma(1 - v \cos \theta/c) \quad (2.58)$$

と変換される。ここで  $\Omega_t^0/\Omega_t = c\Delta t^0/c\Delta t = r^0/r$  であることから、 $r\Omega_t^0 = r^0$  が成立する。これを考慮して (2.57) において

$$\frac{e}{r^2\gamma^2(1 - v \cos \theta/c)^2} = \frac{e}{(r\Omega_t^0)^2} = \frac{e}{(r^0)^2} = E_0 \quad (2.59)$$

と表そう。この表式は荷電粒子を静止するように見る  $K^0$  系における電場を表す。ここで便宜上次の記法を使おう。

$$\epsilon E_0 \rightarrow D_0 \quad (2.60)$$

単位系は CGS 静電単位系を使い、媒質は真空中を考え、誘電率  $\epsilon$  は単位の大きさであるとする。そうすると (2.23) によれば  $\mathbf{r}/r = \boldsymbol{\Omega}$  であるから (2.57) は

$$\mathbf{H} = \gamma D_0 \frac{\mathbf{v}/c \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega_t^0} \quad (2.57')$$

と表すことができる。これは従来理論による磁場を  $\boldsymbol{\Omega}$  および  $D_0$  で書き換えたものに過ぎない。

さてここに述べる光行差による磁場発生理論では、磁場の表現式は仮説 I によって与えられるから、上式の  $(\mathbf{v}/c \times \boldsymbol{\Omega})$  は光行差正弦ベクトル  $\boldsymbol{\Theta}$  で置き換えられるべきである。すなわち

$$\mathcal{H} = \gamma D_0 \boldsymbol{\Theta} \quad (2.61)$$

あるいは

$$\mathcal{H} = \gamma D_0 \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^0}{\Omega_t \Omega_t^0} \quad (2.62)$$

となる。ベクトル量の各要素の添字  $i, j, k$  を使って表せば

$$\mathcal{H}_i = \gamma D_0 (\Omega_j \Omega_k^0 - \Omega_k \Omega_j^0) (\Omega_t \Omega_t^0)^{-1}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.62')$$

ここで添字  $i, j, k$  はそれぞれが 1, 2, 3 をとり、 $1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z$  に対応させ、それぞれ循環させる。式 (2.62) は (2.54) の関係によって  $\mathbf{v}$  に依存する形に書き直すと

$$\mathcal{H} = \gamma D_0 (\Omega_t - \eta) \frac{\gamma \mathbf{v}/c \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega_t \Omega_t^0} \quad (2.63)$$

となる。式 (2.59) と (2.60) によって  $D_0$  を元に戻し、(2.23) を考慮して、(2.57) と比較できる形に書き直すと

$$\mathcal{H} = \frac{e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3} \frac{\gamma (\Omega_t - \eta) (1 - v^2/c^2)}{(1 - v \cos \theta/c)^3} \quad (2.64)$$

と書くことができる。上の表現式と Biot-Sabert の法則に基づく表現式 (2.57) との間の相対的な偏差は

$$\Delta = \frac{\mathcal{H} - \mathbf{H}}{\mathbf{H}} = \gamma (\Omega_t - \eta) - 1 \quad (2.65)$$

と求められる。 $\eta$  は (2.51) に示したように、ベクトル  $\Omega$  のローレンツ収縮に関する項であり、相対速度  $v$  が大きいとその絶対値は 0 より大きいが、 $v$  が小さいと 0 に近づく。しかし速度が大きいと無視出来なくなり、従来理論との差は大きくなる。上記の偏差を図 2.4 の座標の設定で評価すると、 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ ,  $\Omega = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\Omega_t = 1$  であるから

$$\Delta = \gamma(1 - \eta) - 1 = \left(1 - \frac{c}{v} \cos \theta\right)(\gamma - 1) \quad (2.66)$$

となる。この偏差がどのくらいになるかを見積もってグラフに示したのが図 2.4 である。 $\theta = 0$  および  $\pi$  のときに偏差が最も大きくなるが、磁場もまたゼロになる。 $v/c = 0.98$  と光速にかなり近いときを例にとって、磁場が最も強くなる  $\theta = \pi/2$  において評価してみると、図の下部に記したように従来理論による値の約 4 倍程度の増加になる。

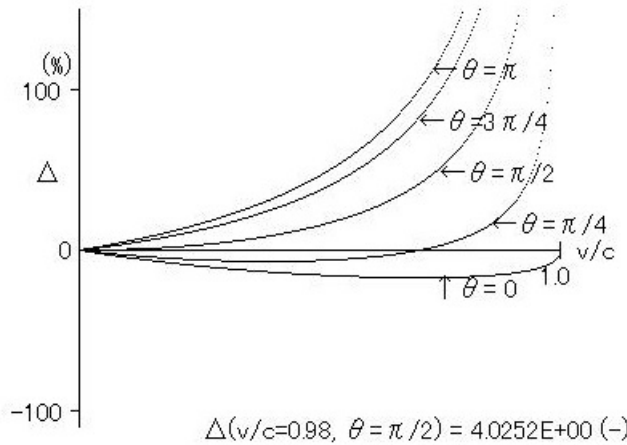


図 2.4: 飛行荷電粒子による磁場発生における光行差理論と従来理論との偏差

多数の荷電粒子からなる電流が作る磁場は次のようにして構成される。電荷密度  $\rho$  の荷電粒子の集団が平均速度  $v$  で導体の中を流れているとすると、電流は  $i = v\rho a$  で表される。ただし  $a$  は導線の断面積であり、 $\rho = \gamma\rho_0$  である。導線上に微小な長さ  $ds$  を考え、多数電子の平均移動速度  $\mathbf{v}$  と同じ方向を持たせたベクトルを電流素  $d\mathbf{s}$  とし、この電流素によって生起する磁場を  $d\mathcal{H}$  とすれば (2.64) を書き直して

$$d\mathcal{H} = \frac{(ids \times \mathbf{r}) (\Omega_t - \eta)(1 - v^2/c^2)}{cr^3 (1 - v \cos \theta/c)^3} \quad (2.67)$$

となる。しかしながら通常の導線を通る自由電子の平均移動速度は、例えば断面  $1\text{mm} \times 1\text{mm}$  の導線 (銅) を流れる 1 アンペア (A) の電流中の電子の「平均」速度は  $0.07\text{mm/s}$  程度である。どんなに条件を揃えても数  $\text{cm/sec}$  にも達しないため、上記の偏差を通常の導線内の電流で実験的に確かめることは難しい。

式 (2.64) に現れる因子  $\eta$  は O 点の観測者が受ける移動電荷からの信号 (確定信号) の伝達距離の相対論的效果に起因するものである。式 (2.45') に表すように、荷電粒子と共に移動する系で  $\mathbf{r}^0$  なる距離ベクトルが観測者 O にとっては  $\mathbf{r}$  となり、そこから粒子の移動距離ベクトル  $\mathbf{vr}/c$  を除いてもなお残る相対論的效果を  $v$  の係数として表したものである。この空間的伸縮は速度ベクトルと平行な方向に起こり、観測者の立つ位置座標に依存する。低速の飛行荷電粒子においては因子  $\eta$  は無視できるので、(2.64) は従来の電磁気学の

Biot-Savart の法則に一致し、従来の電磁気理論で実用上差を生むことはない。しかしこの因子の有無は磁気の発生が光行差という時空間構造に基づくものかどうかを決める根拠を与えるので、理論構成上重要な意味がある。

## 2.5 光行差によって構成される誘導電場の理論

図 2.5 において速度  $v$  で移動する荷電粒子を考えよう。Sommerfeld[3] は一様な速度で飛行する電荷が発生する電場を相対論的に書き表している。P 点に電荷  $e$  を考えると O 点で静止する観測者の観測する電場は CGS 静電単位で表すと

$$\mathbf{E} = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{vr}/c)}{r^3} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v \cos \theta/c)^3} \quad (2.68)$$

と書かれる。この式は飛行荷電粒子  $e$  の生起する電場の Lorentz 変換から導くことができる。磁場発生の際に行ったように、場の強さを (2.59) の記号  $E_0$  および記号  $\Omega_t^0$  を使って表しておこう。式 (2.68) の分母の  $(1 - v \cos \theta/c)$  は (2.58) の関係から  $\Omega_t^0/\gamma$  で置き換えられることを考慮すれば

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma E_0}{\Omega_t^0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{vr}/c}{r} \quad (2.69)$$

と書き換えられる。従来の理論によれば、図 2.5 でベクトル  $\mathbf{r}^0$  と  $\mathbf{r}$  との関係は  $\mathbf{r} - \mathbf{vr}/c = \mathbf{r}^0$  であると見做して

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma E_0}{\Omega_t^0} \frac{\mathbf{r}^0}{r} \quad (2.69')$$

となる。この表現は前節の磁場  $\mathbf{H}$  の場合と同様、ただ従来の理論による飛行電荷の電場を新たな記号で表現したに過ぎない。しかしそこで用いている  $\mathbf{r}^0$  と  $\mathbf{r}$  との関係は図 2.5 の幾何学形状上で成立している関係であって、相対論的光行差の理論によって解釈すれば  $\mathbf{r}^0 = r\boldsymbol{\Omega}^0$  であり、(2.45) を用いると

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{r} + \left\{ \frac{1}{v^2}(\gamma - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \gamma \frac{r}{c} \right\} \mathbf{v}$$

でなければならない。したがって (2.69) から (2.69') へ移行した段階で式が一部、相対論的に修正され、 $\mathbf{r}$  の座標の各成分のうち速度  $\mathbf{v}$  と同方向の成分が  $\gamma$  倍だけ変化を受ける。

この表現によると、移動する荷電粒子による電場は信号が伝播してくる P 点から O 点へ  $\mathbf{r}$  の方向でなく、 $P_0$  から O 点へ  $\mathbf{r}^0$  の方向をとる。2.2 節の定義 II によれば  $\mathbf{r}^0$  は同定義中の項目 (2) の方向であり、 $\mathbf{r}$  は同定義中の項目 (1) の方向である。(2) は飛行する源から放射される場の信号の各時点での先端座標を観測系において連ねた方向であり、信号の伝播前線の法線方向からずれていることを示している。表式 (2.61') に現れる距離  $r^0$  は観測者が信号を受け取ったときの飛行粒子の位置を示す方向に一致しており、それは瞬間的に信号伝達が行われたとした場合の位置を向いている。しかし、任意の観測点がそのような予測をする計算機構を内蔵しているとは考えにくい。近接作用論から解釈すれば、その時点では P から届いた信号によってしか、その「場」の量を確定できないと解釈するのが妥当である。ではまだ信号の到達していない  $P_0$  点に向けた電場  $\mathbf{E}(r^0)$  は、一体どのような信号と見做せばよいのであろうか。ここで採る考え方は次のようなものである。移動する荷電粒子の実際の電場の信号はベクトル  $\mathbf{r}$  に沿って伝搬してくるのであって、ベクトル  $\mathbf{r}^0$  はその伝搬の前線を連ねた軌跡に過ぎない。実際に伝搬してくる信号はある誘導電場を伴っていてそれが観

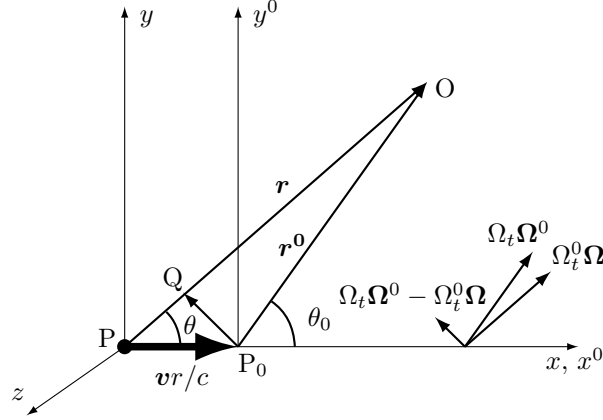


図 2.5: 移動する荷電粒子における電場の構成

測点において合成電場として  $r^0$  の方向を向く、と解釈する。この仕組みを検討してゆくと、結果としてその誘導電場は (3+1) 次元光行差光行差ベクトルの時間成分であることがわかる。以下にその検討過程を示す。

図 2.5 に示すように、この  $r^0$  方向のベクトル  $\overrightarrow{P_0O}$  を、実際に場が伝わってきたと見なされる  $r$  と同じ方向を持つベクトル  $\overrightarrow{QO}$  と、もう一つのベクトル  $\overrightarrow{P_0Q}$  に分解することを考えてみよう。 $\overrightarrow{QO}$  は  $(r^0/r)r$  であり、 $\overrightarrow{P_0Q}$  は  $r^0 - (r^0/r)r$  であるから

$$r^0 = \frac{r^0}{r}r + (r^0 - \frac{r^0}{r}r) \quad (2.70)$$

と置くことができる。三角形  $OP_0Q$  は 2 等辺三角形をなし、 $P_0Q$  はその底辺である。定義式 (2.23) 及び (2.36) から  $r^0 = r\Omega^0$ ,  $r = r\Omega$  であり、 $r^0/r = c\Delta t^0/c\Delta t = \Omega_t^0/\Omega_t$  であること、および (2.24) 右辺の分子分母に  $c$  を掛けた式から  $r/r = \Omega_t$  であることを考慮すれば、上式の両辺を  $r$  で除した式は

$$\frac{r^0}{r} = \Omega^0 = \frac{\Omega\Omega_t^0}{\Omega_t} + (\Omega^0 - \frac{\Omega\Omega_t^0}{\Omega_t}) \quad (2.71)$$

となる。これを (2.61') に代入し、分子分母に  $\Omega_t$  を掛ければ

$$\mathbf{E} = \gamma E_0 \frac{\Omega\Omega_t^0 + (\Omega^0\Omega_t - \Omega\Omega_t^0)}{\Omega_t\Omega_t^0} \quad (2.72)$$

を得る。図 2.5 の右下に表したベクトル図は上式の分数の分子のベクトル関係

$$\Omega^0\Omega_t = \Omega\Omega_t^0 + (\Omega^0\Omega_t - \Omega\Omega_t^0)$$

を図示している。式 (2.71) を次のように 2 つの項に分けて表わそう。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^* + \delta\mathbf{E} \quad (2.73)$$

$\mathbf{E}^*$  および  $\delta\mathbf{E}$  は次のようになる。

$$\mathbf{E}^* = \gamma E_0 \frac{\Omega}{\Omega_t} \quad (2.74)$$

$$\delta\mathbf{E} = \gamma E_0 \frac{\Omega_t\Omega^0 - \Omega\Omega_t^0}{\Omega_t\Omega_t^0} \quad (2.75)$$

そこで仮説 I を導入したことにより誘導される次の系が成り立つ。

系 I - 1 定義 IV で与えた 3 次元の光行差ベクトルを

$$\Theta_\lambda = (\Omega_\mu \Omega_\nu^0 - \Omega_\nu \Omega_\mu^0)(\Omega_t \Omega_t^0)^{-1}, \quad (\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.76)$$

と 4 次元軸性ベクトルに拡張したとき、誘導電場は静電場の伝播に関する光行差ベクトルの第 0 成分 ( $\mu = 0, \nu = 1, 2, 3$ ), ( $\mu = 1, 2, 3, \nu = 0$ ) により表される。

$E^*$  は信号が伝達してくる方向を持った電場である。一方  $\delta E$  はその電場の到着にともない、観測者との相対速度によって誘導される電場を表わす。したがってこの成分は磁場と同じように観測者との相対的速度がゼロになると喪失する。式 (2.73) によれば  $\delta E$  は移動する荷電粒子による電場  $E$  の一構成要素に過ぎないが、これを誘導電場と呼ぶ理由は誘導磁場と密接に関係し、極めて自然に誘導電場に関するファラディの法則に従うことにある。このことは次章に述べよう。

この誘導電場の理論に従えば、式 (2.63') において指摘したパラドックスを次のように解決することができる。荷電粒子が移動すると、遅延的に伝播してくる電場  $E^*$  に加えて、光行差に由来する誘導電場  $\delta E$  が発生する。そこでこれらを加えると、

$$E = E^* + \delta E = \gamma E_0 \frac{\Omega}{\Omega_t} + \gamma E_0 \frac{\Omega_t \Omega^0 - \Omega_t^0 \Omega}{\Omega_t \Omega_t^0} = \gamma E_0 \frac{\Omega^0}{\Omega_t^0} \quad (2.77)$$

となる。飛行する荷電粒子の電場は  $E^*$  も  $\delta E$  も全て遅延的に伝播してくる場であって、図 2.5 に示したように  $\vec{PO}$  の方向に沿って遅延して伝播してくる。しかし観測点に現れる場は荷電粒子の運動により誘導された場  $\delta E$  によって、あたかもあらかじめ  $P_0$  点に荷電粒子を置いておき、そこから信号が瞬時に伝えられたかのように  $\Omega^0$  方向を向き、場の強さも  $r^0$  に依存するように補正される、と言い替えられる。そしてこのような誘導項は (3+1) 次元光行差ベクトルの時間成分によって表されると解釈できる。

## 2.6 定常電流の解釈

系 I - 1 がマクロな系においても成立するためには解決しておかなければならない問題がある。(2.73) において導いた電場  $E$  によれば、定常的な電流においても誘導電場が存在する。実際には導線の中を移動する電子にもとづく定常電流において誘導電場は検出されていないから、このままでは実験事実に反する。この問題は以下に述べるように解決される。我々が測定する電気回路は金属中を流れる閉じた定常電流である。そこでは多数の荷電粒子の集団的振る舞いが現象として現れる。導体中の原子核と電子の格子を拡大して図 2.6 のように図式化して考えよう。全体で中性であるような線状の導体を考え、 $x$  軸上に金属原子の陽イオンと定常的に流れる電子を同数並べてある。間隔は任意でよく、連続であっても良い。電流に寄与しない電子は陽イオンの正電荷と打ち消しあうものとして図から除く。電子はいずれも一定の速度  $v$  で  $+x$  軸の方向に走っているものとし、電子とともに走る系において単位長さ当たり電荷線密度  $-\rho^0$  の電子の集団を考えよう。いま点  $O$  にいる観測者が、 $x$  軸上の  $x$  点において時刻  $t$  に発した信号を観測したとする。このとき微小な導体の長さ  $dx$  に含まれる電子の生起する電場は (2.59), (2.60) において  $e$  を  $-\rho^0(x, t)dx$  で置き換え、表式 (2.72) を用いると

$$dE^- = \frac{-\gamma \rho^0(x, t) dx}{(r^0)^2} \frac{\Omega^0}{\Omega_t^0} \quad (2.78)$$

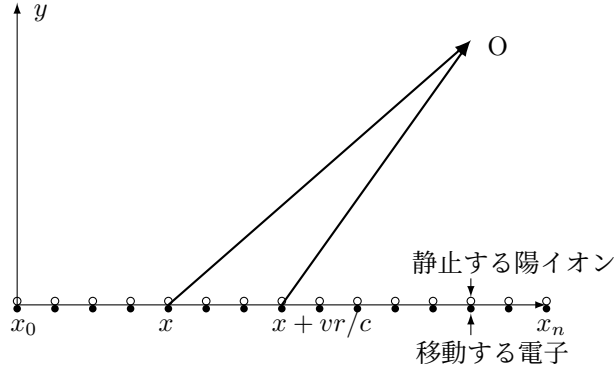


図 2.6: 定常流状態にある電子の誘導起電力は打ち消し合う

と書ける。 $\Omega^0/\Omega_t^0 = r^0/r^0$  であるから

$$d\mathbf{E}^- = \frac{-\gamma\rho^0(x,t)}{(r^0)^3}\mathbf{r}^0 dx \quad (2.79)$$

となる。信号が  $r/c$  秒かかって距離  $r$  だけ離れた観測点  $O$  まで伝播している間に、電子の流れは図 2.6 に示すように  $x + vr/c$  の位置に来ている。この点に静止する陽イオンは単位長さ当たり  $+\rho$  の電荷線密度を持つはずである。観測点が上記の信号  $d\mathbf{E}_1^-$  を受け取ったとき、同時に同じ方向  $\mathbf{r}^0$  を持つ  $x + vr/c$  点からの陽イオンによる電場が届いており、その大きさは長さ  $dx$  に対して

$$d\mathbf{E}^+ = \frac{\rho(x + vr/c, t_1)}{(r^0)^3}\mathbf{r}^0 dx \quad (2.80)$$

である。この信号はその伝播距離が  $d\mathbf{E}_1^-$  と異なるため発進時刻が異なり、信号が発せられている時点は  $d\mathbf{E}_1^-$  が発信された時刻  $t$  以後であって、その差は  $(r - r_0)/c$  となり、したがって発信時刻は  $t_1 = t + (r - r_0)/c$  となる。

$\rho^0$  は電子とともに走る系  $K^0$  にいる観測者の測る電荷線密度で、線密度を（電荷量/長さ）として定義しているため、長さのローレンツ収縮効果によって、 $O$  点に静止する観測者の測る電荷線密度としては  $\gamma\rho^0$  と計測されるものと解釈される。もし定常電流ならば  $\rho, \rho^0$  ともに時間的にも空間的にも  $x$  軸に沿って変化なく

$$\rho(x + vr/c, t_1) = \gamma\rho^0(x, t) \quad (2.81)$$

である。したがって (2.80) は (2.79) の電場を打ち消す大きさと同方向を持ち、

$$d\mathbf{E} = d\mathbf{E}^+ + d\mathbf{E}^- = 0 \quad (2.82)$$

となって電場は生じない。誘導電場は  $d\mathbf{E}^-$  の中に  $d\mathbf{E}^- = d(\mathbf{E}^{*-} + \delta\mathbf{E}^-)$  として存在する。観測点  $O$  の測定にかかる電場は  $x_0$  から  $x_n$  までの直線電線に対して

$$\mathbf{E} = \int_{x_0}^{x_n} \frac{1}{(r^0)^3} \{\rho(x + vr/c, t_1) - \gamma\rho^0(x, t)\}\mathbf{r}^0 dx = 0 \quad (2.83)$$



である。導体の端部を除いて導体中のいたるところで同様のことが起こる。上に示した積分では積分範囲の両端で打ち消されないわずかな部分が残る。しかし回路は突然に切れることはなく、一般に電流の回路は閉じており、導体の終端は始端に連なるため、飛行荷電粒子のもつ誘導電場は打ち消されることになる。

もし(2.81)の関係が崩れるとき、例えば $\rho^0$ が時間的に急激に変化するならば、誘導電場は局部的に打ち消されず、誘導電場として検出されるはずである。これが次章に取り扱うファラディの法則に結びつくことになる。

## 参考文献

- [1] 例えば [http://en.wikipedia.org/wiki/Aberration\\_of\\_light](http://en.wikipedia.org/wiki/Aberration_of_light)
- [2] Albert Einstein, "The Meaning of Relativity", Fifth Edition Princeton University Press(1955), Princeton.
- [3] A. Sommerfeld, "Elektrodynamik", Vorlesungen uber Theoretische Physik, band III, 伊藤大介訳, "電磁気学", ゾンマーフェルト理論物理学講座 III, p289, 講談社 (1969) 東京
- [4] Philip M.Morse and Herman Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", part I, p.213, McGRAW-HILL(1953), New York.
- [5] C.Møller, "The Theory of Relativity", p.93 - p.100, Oxford at the Clarendon Press (1952).
- [6] David Halliday, PRobert Resnick, 'Physics, Part II, John Wiley & Sons, Inc. New York(1962), 鈴木 皇 訳、理工系 物理学 (II) 上、P253, 株式会社トッパン (昭 47) 東京
- [7] 山内恭彦, "物理数学", 岩波書店 (1963) 東京
- [8] R. B. レートン, "現代物理学概論", 齊藤信彦・並木美喜雄・山田勝美・小林徹郎 訳, 岩波書店
- [9] 平岡正勝, 田中幹也, "移動現象論", 朝倉書店 (1971) 東京
- [10] ランダウ, リフシッツ, "場の古典論", =電気力学、特殊および一般相対性理論=, (原書第 6 版), 恒藤敏彦、広重徹 訳, 東京図書 (1997)
- [11] K.Matsubara, Simulation Program Emalps, <http://www2.marukotv.jp/~cil/books/A-3.pdf>